

# **Elektronischer Transport in Quanteninterferometern und komplexen Ringstrukturen**

Von der Fakultät für Mathematik und Physik  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
– Dr. rer. nat. –  
genehmigte Dissertation  
von

Dipl.-Phys. Alexander Mühle  
geboren am 21. Dezember 1976 in Wedel

2008

Referent: Prof. Dr. Rolf J. Haug  
Korreferent: Prof. Dr. Michael Oestreich

Tag der Promotion: 9. Juli 2008

## Kurzzusammenfassung

Diese Arbeit untersucht die elektronischen Transporteigenschaften verschiedener ringförmiger Nanostrukturen. Den Schwerpunkt bildet die Betrachtung der in solchen Ringen beobachtbaren Aharonov-Bohm-Oszillationen, die auf der quantenmechanischen Interferenz von Elektronen beruhen.

Die Basis für die Herstellung der Quantenringe mit Durchmessern von  $\sim 500$  nm bis  $\sim 1000$  nm waren GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen, die in einer Tiefe von etwa 35 nm unter der Oberfläche ein zweidimensionales Elektronensystem besitzen. In dieser Schicht wurden die Ringe durch lokale anodische Oxidation mit einem Rasterkraftmikroskop erzeugt. Die Transportmessungen wurden bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit eines externen Magnetfeldes und der angelegten Gatespannungen durchgeführt.

Alle vorgestellten Strukturen zeigen im Regime starker Kopplung an die Zuleitungen im senkrechten Magnetfeld den Aharonov-Bohm-Effekt. Eine beobachtete Modulation dieser Oszillationen kann dabei als Zeichen von Spin-Bahn-Wechselwirkung gedeutet werden. In einem Ring tritt im Regime mit Tunnelkopplung an die Zuleitungen und geringer Elektronenzahl eine reduzierte Aharonov-Bohm-Periode auf, die als Auswirkung von Elektron-Elektron-Wechselwirkung erklärt werden kann.

Eine komplexe Struktur aus zwei konzentrischen Quantenringen zeigt bei Variation des Magnetfeldes eine Beeinflussung des äußeren durch den inneren Ring, obwohl beide Teile der Struktur voneinander isoliert sind. Die beobachtete periodische Modulation der Leitfähigkeit des äußeren Rings wird daher auf elektrostatische Wechselwirkung zurückgeführt. Eine entsprechende periodische Verschiebung der Ladungsverteilung im inneren Ring ergibt sich auch aus der theoretischen Beschreibung mit einem Modell, das die radiale Ausdehnung der elektronischen Wellenfunktion berücksichtigt.

Ein einfacher Quantenring mit deutlich asymmetrischer Geometrie kann in Abhängigkeit der angelegten Gatespannungen in drei Quantenpunkte aufgeteilt werden. Diese zeigen bei unterschiedlichen Gatekonfigurationen sowohl paarweise Kopplung als auch die Bildung eines echten Dreifachquantenpunktes. Damit wird demonstriert, wie durch die geschickte Veränderung eines einfachen Designs eine komplexere Quantenstruktur erzeugt werden kann.

## Schlagwörter

Aharonov-Bohm-Effekt, Quantenringe, Quantenpunkte

## Abstract

In this thesis, transport properties of several ring-shaped nanostructures are investigated. The focus is on examining the Aharonov-Bohm oscillations, which are observable in such rings due to the quantum mechanical interference of electrons.

The basis for manufacturing the quantum rings with diameters from  $\sim 500$  nm to  $\sim 1000$  nm were GaAs/AlGaAs heterostructures with two-dimensional electron systems about 35 nm below the surface. In this layer, the quantum rings were fabricated by means of local anodic oxidation using an atomic force microscope. Transport measurements were performed at low temperatures in dependence on an external magnetic field and the applied gate voltages.

When in the regime of strong coupling to the leads and exposed to a perpendicular magnetic field, all of the structures presented in this thesis show an Aharonov-Bohm effect. An observed modulation of these oscillations can be interpreted as a consequence of spin-orbit interaction. One ring shows a reduced Aharonov-Bohm period in the regime of tunnel-coupling and few electrons, which can be explained by electron-electron interaction.

A complex structure consisting of two concentric quantum rings shows an influence of the inner ring on the outer one when the magnetic field is swept, although both parts of the structure are insulated from each other. Therefore, the observed periodic modulation of the conductance in the outer ring is attributed to electrostatic interaction. A corresponding periodic shift of the charge distribution in the inner ring arises from the use of a theoretical model, which takes the radial extension of the electronic wave function into account.

A simple quantum ring with an asymmetric design is able to split into three coupled quantum dots when appropriate gate voltages are applied. In dependence on the gate configuration, these dots show coupling by pairs as well as the formation of a real triple dot. Thus, the generation of a complex quantum structure from a simple design by a subtle variation in the geometry is demonstrated.

## Keywords

Aharonov-Bohm effect, quantum rings, quantum dots

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>5</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>7</b>
<b>Symbol- und Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>9</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>13</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>17</b>
2.1 Zustandsdichten . . . . .	17
2.2 Quantenpunkte . . . . .	20
2.2.1 Coulomb-Blockade . . . . .	21
2.2.2 Rautenmessung . . . . .	23
2.2.3 Mehrfachquantenpunkte . . . . .	25
2.3 Quantenpunktkontakte . . . . .	29
2.4 Quantenringe . . . . .	31
2.4.1 Der Aharonov-Bohm-Effekt . . . . .	32
2.4.2 Der elektrische Aharonov-Bohm-Effekt . . . . .	36
2.4.3 Spektrum . . . . .	37
2.5 Zusammenfassung . . . . .	38
<b>3 Probenherstellung und Messaufbau</b>	<b>39</b>
3.1 Erzeugung eines 2DEG . . . . .	39
3.2 Verwendete Heterostrukturen . . . . .	41
3.3 Optische Lithografie . . . . .	43
3.4 Lithografie mit dem Rasterkraftmikroskop . . . . .	44
3.5 Kryostaten . . . . .	46
3.6 Transportmessungen . . . . .	48
3.7 Zusammenfassung . . . . .	50
<b>4 Messungen an einfachen Quantenringen</b>	<b>51</b>
4.1 Die Struktur 7100012-HB9 . . . . .	51
4.2 Aharonov-Bohm-Effekt . . . . .	53

4.3	Reduzierte Aharonov-Bohm-Periode . . . . .	54
4.4	Additionsspektrum . . . . .	59
4.5	Die Strukturen P03-S5 und P03-S2 . . . . .	61
4.6	Modulierte Aharonov-Bohm-Amplitude . . . . .	62
4.7	Zusammenfassung . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Konzentrische Quantenringe</b>	<b>71</b>
5.1	Die Struktur P04A-S1 . . . . .	71
5.2	Magnetotransport durch Ring I . . . . .	73
5.3	Kopplung zwischen Ring I und Ring II . . . . .	76
5.4	Zusammenfassung . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Quantenring mit Dreifachdot</b>	<b>81</b>
6.1	Die Struktur P04B-S2 . . . . .	81
6.2	Magnetotransport . . . . .	83
6.3	Transportspektrum . . . . .	84
6.4	Charakterisierung der Quantenpunkte . . . . .	89
6.5	Ladungsdetektion mit dem QPC . . . . .	90
6.6	Zusammenfassung . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>93</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>97</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>107</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Zustandsdichten . . . . .	19
2.2	Coulomb-Blockade . . . . .	21
2.3	Ladungsdiagramm . . . . .	22
2.4	Rautenmessung . . . . .	24
2.5	Kapazitive Kopplung . . . . .	26
2.6	Tunnelkopplung . . . . .	27
2.7	Quantenpunktkontakt . . . . .	29
2.8	Leitfähigkeit eines QPC . . . . .	30
2.9	QPC als Ladungsdetektor . . . . .	31
2.10	Schema eines Quantenrings . . . . .	32
2.11	Transmission eines symmetrischen Rings . . . . .	34
2.12	Transmission eines asymmetrischen Rings . . . . .	35
2.13	Spektrum eines Quantenrings . . . . .	38
3.1	Entstehung eines 2DEG . . . . .	40
3.2	Verwendete Heterostrukturen . . . . .	42
3.3	Verwendete Mesa-Formen . . . . .	43
3.4	Lokale Anodische Oxidation . . . . .	45
3.5	Untersuchte Quantenringe . . . . .	47
3.6	Messaufbau . . . . .	49
4.1	Struktur 7100012-HB9 . . . . .	52
4.2	Aharonov-Bohm-Effekt . . . . .	53
4.3	Additionsspektrum . . . . .	55
4.4	Reduzierte Aharonov-Bohm-Periode . . . . .	57
4.5	Additionsspektrum . . . . .	60
4.6	Strukturen P03-S5 und P03-S2 . . . . .	61
4.7	Modulierte Aharonov-Bohm-Amplitude, größerer Ring . .	63
4.8	Modulierte Aharonov-Bohm-Amplitude, kleinere Ringe . .	65
4.9	Gateabhängigkeit der Modulation . . . . .	67
4.10	Spin-Bahn-Kopplung . . . . .	68
5.1	Struktur P04A-S1 . . . . .	72

## Abbildungsverzeichnis

5.2	Magnetotransport durch Ring I . . . . .	73
5.3	Große Oszillationen im Magnetotransport . . . . .	74
5.4	Kleine Oszillationen im Magnetotransport . . . . .	75
5.5	Energiespektrum von Ring II . . . . .	77
5.6	Aufenthaltswahrscheinlichkeiten . . . . .	79
6.1	Struktur P04B-S2 . . . . .	82
6.2	Magnetotransport . . . . .	84
6.3	Transportspektrum . . . . .	85
6.4	Coulomb-Rauten . . . . .	86
6.5	Anticrossings . . . . .	88
6.6	Anordnung der Quantenpunkte . . . . .	89
6.7	Messung am QPC . . . . .	91



# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$a_{\text{AlAs}}$	Gitterkonstante von Aluminiumarsenid
$a_{\text{GaAs}}$	Gitterkonstante von Galliumarsenid
$\alpha$	Hebelfaktor
$\vec{A}$	Vektorpotenzial
$b$	elektronische Breite
$B, \vec{B}$	magnetische Flussdichte
$\Delta B$	Periode von Aharonov-Bohm-Oszillationen
$\beta_1, \beta_2$	Steigungen
$c_{\text{I}}, c_{\text{II}}$	Faktoren
$C$	Kapazität
$C_{\Sigma}$	Gesamtkapazität
$C_{\Sigma, \text{I}}, C_{\Sigma, \text{II}}$	Gesamtkapazität von QD I bzw. II
$C_{\text{G}}$	Kapazität zu einem Gate
$C_{\text{Gi}}$	Kapazität zu Gate $i$
$C_{\text{Gi, I}}$	Kapazität von QD I zu Gate $i$
$C_{\text{S}}$	Kapazität zu Source
$C_{\text{D}}$	Kapazität zu Drain
$C_{\text{I, II}}$	Kapazität zwischen QD I und QD II
$\mathcal{C}$	Bahn
$\chi$	halber Ringumfang in Fermi-Wellenlängen
$d$	Durchmesser
$D$	Zustandsdichte
$D_{i\text{D}}$	Zustandsdichte eines $i$ -dimensionalen Systems
$D_{Qi\text{D}}$	Zustandsdichte eines quasi- $i$ -dimensionalen Systems
$\delta$	Asymmetrieparameter
$\delta(X)$	Dirac-Funktion
$e$	Eulersche Zahl
$e$	Elementarladung
$E$	Energie
$E_{\text{F}}$	Fermi-Energie

## Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$E_C$	Leitungsbandkante
$E_V$	Valenzbandkante
$E_L$	Ladeenergie
$E_i$	$i$ -tes Energieniveau
$E_{i,I}, E_{i,II}$	$i$ -tes Energieniveau von QD I bzw. II
$E_{i0}$	ursprüngliches $i$ -tes Energieniveau
$E_{i0,I}, E_{i0,II}$	ursprüngliches $i$ -tes Energieniveau von QD I bzw. II
$\Delta E_{+,-}$	Aufspaltung von Molekülzuständen
$\epsilon$	Kopplungskoeffizient
$\vec{f}$	Flächenvektor
$F$	Flächeninhalt
$F_k$	Flächeninhalt im k-Raum
${}_1F_1(X_1, X_2, X_3)$	konfluente hypergeometrische Funktion
$\mathcal{F}$	Fläche
$G$	Leitfähigkeit
$\Gamma(X)$	Gamma-Funktion
$h$	Plancksches Wirkungsquantum
$\hbar$	$h/(2\pi)$ , reduziertes Plancksches Wirkungsquantum
$i$	Index
$I$	elektrischer Strom
$I_{AC}$	elektrischer Wechselstrom
$I_{DC}$	elektrischer Gleichstrom
$k$	Kreiswellenzahl
$k_F$	Fermi-Kreiswellenzahl
$k_B$	Boltzmann-Konstante
$l, m, n$	Quantenzahlen
$l_e$	elektronische Kohärenzlänge
$L$	räumliche Ausdehnung in eine Dimension
$\lambda$	renormalisierte magnetische Länge
$m^*$	effektive Masse
$M$	Hilfsterm
$\mu_S$	chemisches Potenzial in Source
$\mu_D$	chemisches Potenzial in Drain
$\mu_e$	Elektronenbeweglichkeit
$n_e$	Elektronenkonzentration
$N$	Anzahl
$N_I, N_{II}$	Elektronenzahl in QD I bzw. QD II
$\Omega_k$	Volumen eines Zustandes im k-Raum
$P$	Punkt

## Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$\pi$	Kreiszahl
$\phi$	Skalarpotenzial
$\varphi$	Phase
$\Phi$	magnetischer Fluss
$\Phi_0$	$h/e$ , magnetisches Flussquantum
$\psi$	Zustand
$\psi_I, \psi_{II}$	Zustand in QD I bzw. II
$\psi_+, \psi_-$	Molekülzustände
$Q$	elektrische Ladung
$r$	radiale Koordinate
$r_0$	Radius eines Quantenrings
$\Delta r$	Breite einer Ringbahn
$s$	Weg
$\vec{s}$	Wegvektor
$t$	Zeit
$T$	Temperatur
$\Theta(X)$	Heaviside-Funktion
$\mathcal{T}$	Zeitraum
$\tau_i$	Transmissionskoeffizient des $i$ -ten Kanals
$\theta$	$\pi\Phi/\Phi_0$
$v_F$	Fermi-Geschwindigkeit
$V$	elektrische Spannung
$V_G$	Spannung an einem Gate
$V_{Gi}$	Spannung an Gate $i$
$V_{SD}$	Spannung über Source und Drain
$\Delta V_G$	Abstand über der $V_G$ -Achse
$\Delta V_{Gi}$	Abstand über der $V_{Gi}$ -Achse
$\Delta V_{G2,I}^{\text{kap.}}$	Sprungweite der Blockade-Linien von QD I bei kapazitiver Kopplung an einen anderen QD
$\Delta V_{G2,I}^{\text{tunn.}}$	Abstand zwischen einem Tripelpunkt und der Verlängerung der Linie von QD I bei Tunnelkopplung an einen anderen QD
$x, y, z$	Raumkoordinaten
$X, X_1, X_2, X_3$	allgemeine Argumente
0D, 1D, 2D, 3D	null-, ein-, zwei-, dreidimensional
Q0D, Q1D, Q2D, Q3D	quasi-0D, -1D, -2D, -3D
I, II, III	Bezeichnungen bestimmter Quantenpunkte
2DEG	zweidimensionales Elektronengas

## Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

AFM	Rasterkraftmikroskop (atomic force microscope)
D	Drain
<i>et al.</i>	und andere
G1, G2, G3, G4	Gate 1, Gate 2, Gate 3, Gate 4
S	Source
QD	Quantenpunkt (quantum dot)
QPC	Quantenpunktkontakt (quantum point contact)

AlAs	Aluminiumarsenid
AlGaAs	Aluminiumgalliumarsenid
As <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Arsen(III)-oxid
GaAs	Galliumarsenid
Ga <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Gallium(III)-oxid
h <sup>+</sup>	positiv geladenes Loch
H <sup>+</sup>	Proton
H <sub>2</sub> O	Wasser
<sup>3</sup> He	Helium-3
<sup>4</sup> He	Helium-4
OH <sup>-</sup>	Hydroxidion
Si	Silizium

# Kapitel 1

## Einleitung

Moderne Herstellungsverfahren erlauben es, auf Basis von festen Materialien kontrolliert mesoskopische Strukturen zu erzeugen, die aufgrund ihrer minimalen Abmessungen auf der Nanometer-Skala auch als „Nanostrukturen“ bezeichnet werden. [1–3] „Mesoskopisch“ bedeutet dabei, dass sie ihren Eigenschaften nach zwischen der klassisch zu beschreibenden makroskopischen Welt und dem von der Quantenmechanik dominierten mikroskopischen Bereich stehen: Während sie noch aus einer genügend großen Zahl von Atomen bestehen, um selbst nicht als Quantenobjekte behandelt werden zu müssen, sind sie schon klein genug, um manche quantenmechanischen Effekte zu zeigen. So kann in solchen Systemen beispielsweise die Bewegungsfreiheit von Elektronen in einer oder mehreren Dimensionen auf Bereiche in der Größenordnung ihrer Wellenlänge [4] eingeschränkt werden. Dadurch treten quantenmechanische Effekte auf, die in dieser Art von Bauteilen dann umfassenden experimentellen Untersuchungen zugänglich sind. Denn es ist es zum Beispiel möglich, eine solche Struktur einfach mit Zuleitungen zu versehen und darüber ihre elektronischen Transporteigenschaften zu beobachten. An der Elektronenhülle eines einzelnen Atoms, die ebenfalls aus stark eingeschränkten Elektronen besteht, kann eine vergleichbare Kontaktierung nicht vorgenommen werden. Auch kann die Geometrie eines mesoskopischen Designs flexibel gestaltet und den jeweiligen Ansprüchen angepasst werden.

Ein Typ dieser Strukturen sind sogenannte Quantenpunkte. [5–7] Dabei handelt es sich um kleine, durch Potenzialbarrieren umschlossene Gebiete, auf denen Elektronen in allen Raumrichtungen wie oben beschrieben eingeschränkt sind. Wegen der Ähnlichkeit dieser Situation zu der von Elektronen in einer Atomhülle werden Quantenpunkte auch als „künstliche Atome“ [8] bezeichnet. Sie werden häufig aus Halbleiter-Materialien gefertigt, wobei entweder selbstorganisiertes Wachstum genutzt wird [9, 10] oder eine Heterostruktur [11], die schon ein zweidimensionales Elektronensystem

enthält, durch Lithografie weiterbearbeitet wird [12]. Besonderes Interesse richtet sich dabei auf die Möglichkeit, mehrere gekoppelte Quantenpunkte in einer Struktur zu kombinieren. Neben allgemeinem Fortschritt in der Grundlagenforschung könnte diese langfristig zu der Möglichkeit der Realisierung eines Quantencomputers [13] auf Halbleiter-Basis führen. [14, 15] So wurden bereits Doppelquantenpunkte realisiert [16–19] und, abgesehen von grundlegenden Experimenten [17], erst in den letzten Jahren auch Dreifachquantenpunkte [20–24].

Eine weitere wichtige Art mesoskopischer Systeme stellen Quantenringe dar, bei denen es sich um eindimensionale, ringförmig geschlossene Leiterbahnen handelt. Solche Strukturen wurden zuerst aus Metall [25–28] hergestellt, aber später ebenfalls in Halbleitern durch verschiedene Lithografie-Methoden [29–33] oder Selbstorganisation [34–37] realisiert. Vor kurzem ist die Herstellung einer solchen Geometrie auch in Graphen gelungen. [38]

Quantenringe, die lateral kontaktiert sind, können als Interferometer für Ladungsträger verwendet werden, da sie ihnen zwei getrennte Wege zur Ausbreitung anbieten. Die Teile einer Wellenfunktion, die sich am Eingang auf diese beiden Wege aufteilt, werden bei tiefen Temperaturen [39] am Ausgang wieder kohärent überlagert, sodass im Transport eine Interferenz beobachtet werden kann. Da die Art dieser Interferenz von der Entwicklung der quantenmechanischen Phase auf den unterschiedlichen Wegen abhängt, eignen sich solche Strukturen gut zur Untersuchung dieser nur indirekt zugänglichen Größe. So lassen sich die Auswirkungen von externen Einflüssen auf die Phasendifferenz zwischen den beiden Armen des Interferometers messen. Dadurch kann beispielsweise der Aharonov-Bohm-Effekt [40], der durch einen vom Ring umschlossenen magnetischen Fluss hervorgerufen wird, beobachtet werden. Diese Aharonov-Bohm-Phase ist dabei ein Spezialfall der geometrischen Berry-Phase [41]. Auch eine Spin-Berry-Phase [42–44], die bei Spin-Bahn-Wechselwirkung von Elektronen in einem Ring aufgesammelt wird, kann beobachtet werden. [45–48] Außerdem kann in eine Ring-Geometrie eine andere Art von Quantenstruktur eingebaut werden, um dort auftretende Phaseneffekte zu untersuchen, wie zum Beispiel ein Einzel- [49–53] oder Doppelquantenpunkt [54, 55]. Ebenfalls finden miteinander gekoppelte Quantenringe Interesse. So wurden bereits konzentrische Doppelringe durch selbstorganisiertes Wachstum realisiert [56, 57] und an einem lithographisch erzeugten, lateralen Doppelring konnte die Interferenz von Elektronen aus unterschiedlichen Quellen beobachtet werden [58].

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Quantenringen, die durch Lithografie mit der Spitze eines Rasterkraftmikroskops [59] durch lokale

anodische Oxidation [60] im zweidimensionalen Elektronengas verschiedener GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen erzeugt wurden. Diese Ringe sind mit lateralen Zuleitungen und Gates versehen und wurden durch Transportmessungen bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit eines externen Magnetfeldes sowie der angelegten Gatespannungen untersucht. Die Arbeit gliedert sich wie im Folgenden aufgeführt:

**Kapitel 2** beschäftigt sich mit der theoretischen Beschreibung niederdimensionaler Elektronensysteme. Zuerst wird dabei die Zustandsdichte von drei- bis eindimensionalen Systemen beschrieben. Anschließend wird auf Quantenpunkte und Quantenpunktkontakte eingegangen. Der letzte Teil des Kapitels konzentriert sich dann auf Quantenringe und an ihnen zu beobachtende Phänomene, insbesondere den Aharonov-Bohm-Effekt.

In **Kapitel 3** wird zuerst die Entstehung eines zweidimensionalen Elektronengases in einer Halbleiter-Heterostruktur beschrieben. Danach werden der Aufbau und die Parameter der drei verschiedenen Heterostrukturen gezeigt, aus denen die untersuchten Proben gefertigt wurden. Anschließend werden die dazu verwendeten Lithografiemethoden vorgestellt. Der folgende Abschnitt geht auf die Kryostaten ein, in welchen die Proben auf die für die Experimente notwendigen tiefen Temperaturen gekühlt wurden und durch eingebaute Spulen hohen Magnetfelder ausgesetzt werden konnten. Danach wird die für die Messung des elektronischen Transports verwendete Anordnung von Geräten beschrieben.

**Kapitel 4** beschäftigt sich mit den Messungen an einfachen Quantenringen. Dies sind die Ringe, die nicht die geometrischen Besonderheiten der in den folgenden beiden Kapiteln beschriebenen Proben aufweisen. Bei der Struktur, auf die zuerst eingegangen wird, ist bei starker Kopplung an die Zuleitungen der normale Aharonov-Bohm-Effekt zu beobachten. Liegt dagegen Tunnelkopplung vor, so tritt bei wenigen Elektronen auf dem Ring durch Elektron-Elektron-Wechselwirkung eine reduzierte Aharonov-Bohm-Periode auf. Außerdem wird das Transportspektrum des Rings über einen großen Bereich einer Gatespannung und des externen Magnetfeldes gezeigt. Danach wird auf die modulierte Amplitude der normalen Aharonov-Bohm-Oszillationen bei dieser Struktur und weiteren zwei, anschließend beschriebenen Ringen eingegangen. Diese Modulation wird dabei als Zeichen von Spin-Bahn-Wechselwirkung gedeutet.

**Kapitel 5** stellt eine komplexe Struktur vor, die aus zwei konzentrischen Quantenringen besteht. Der äußere dieser beiden Ringe ist mit Zuleitungen verbunden, während der innere vom Rest der Struktur isoliert ist. Damit ist dieser konzentrische Doppelring der erste, an dem laterale Transportmessungen vorgenommen werden können, da alle bisher bekannten Strukturen

ähnlicher Form, wie beispielsweise die in [56] und [57], über keine entsprechenden Zuleitungen verfügen. Es wird gezeigt, dass im Transport über die Zuleitungen nicht nur der Aharonov-Bohm-Effekt des äußeren Rings auftritt, sondern zusätzlich auch eine weitere Komponente, die zum inneren Ring passt. Dies wird über die Annahme erklärt, dass die Ladung auf dem inneren Ring magnetfeldabhängig verschoben wird und durch elektrostatische Wechselwirkung die Leitfähigkeit des äußeren Rings moduliert. Dazu wird auch eine Betrachtung mit einem theoretischen Modell ausgeführt.

**Kapitel 6** präsentiert einen Quantenring, dessen leitfähiger Bereich aufgrund seiner Geometrie in drei gekoppelte Quantenpunkte aufgeteilt werden kann. Es wird gezeigt, dass sich diese Struktur bei hohen positiven Gatespannungen wie ein gewöhnlicher Quantenring verhält, aber bei niedrigeren Spannungen die überlagerten Coulomb-Blockade-Linien von drei verschiedenen Quantenpunkten beobachtet werden. Es treten bei diesen Linien auch die für gekoppelte Quantenpunkte typischen Kreuzungsmuster auf, sodass vom Vorhandensein eines echten Dreifachquantenpunktes ausgegangen wird. Danach werden die drei Quantenpunkte über den Verlauf der Blockade-Linien charakterisiert und zuletzt wird eine Ladungsmessung mit einem an den Ring angrenzenden Quantenpunktkontakt gezeigt.

Am Ende enthält **Kapitel 7** eine abschließende Zusammenfassung der Ergebnisse.

Teile dieser Arbeit wurden bereits in Fachzeitschriften veröffentlicht. Die entsprechenden drei Artikel sind die, die auch in der Publikationsliste auf Seite 109 aufgeführt sind.



# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

Bei den im Rahmen dieser Arbeit hergestellten und untersuchten Quantenbauelementen handelt es sich um mesoskopische Strukturen, also Systeme, deren wesentliche Abmessungen zwar größer sind als die atomare Skala, aber deutlich zu klein, als dass eine klassische Beschreibung möglich wäre. Um das Verhalten von Elektronen, die sich in leitfähigen Bereichen mit entsprechenden Ausdehnungen aufhalten, zu verstehen, wird in diesem Kapitel auf die grundlegende theoretische Beschreibung niederdimensionaler Elektronensysteme eingegangen, bei denen die freie Beweglichkeit der Ladungsträger auf bestimmte Raumrichtungen beschränkt ist. Zuerst wird hier die Zustandsdichte von drei- bis nulldimensionalen (3D – 0D) Systemen beschrieben. Danach werden Einzel- und Mehrfachquantenpunkte betrachtet und anschließend wird auf den Transport durch einen Quantenpunkt-kontakt eingegangen. Der letzte Teil dieses Kapitels konzentriert sich dann auf die Transporteigenschaften und das Spektrum von Quantenringen.

### 2.1 Zustandsdichten

Die Zustandsdichte  $D(i)$  eines Systems beschreibt den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Zustände des Systems und einem ihnen zugeordneten Index  $i$ . Sie ist so definiert, dass für die Gesamtzahl  $N$  aller Zustände gilt:

$$N = \int_{System} di D(i) \quad (2.1)$$

Wenn für Beschreibung der Zustände von Elektronen in einem 3D Festkörper periodischen Randbedingungen mit Periodenlänge  $L$  angenommen werden, ergibt sich, dass sie äquidistant im  $k$ -Raum verteilt liegen und jedem von ihnen das  $k$ -Volumen  $\Omega_k = (2\pi)^3/L^3$  zugeordnet werden kann. Weiterhin liegen sie genügend dicht, um als quasi-kontinuierlich angesehen

werden zu können. Daraus ergibt sich bei entsprechender Rechnung für die Zustandsdichte in Abhängigkeit von  $k$

$$D(k) = 2 \frac{F_k(k)}{\Omega_k} \quad , \quad (2.2)$$

wobei durch den Faktor 2 der Elektronenspin berücksichtigt wird und  $F_k(k) = 4\pi k^2$  die Kugeloberfläche mit dem Radius  $k$  ist. In Systemen mit nur ein oder zwei Dimensionen ergibt sich die Zustandsdichte ganz analog, sodass dort lediglich  $\Omega_k$  und  $F_k$  durch die entsprechenden Ausdrücke ersetzt sind, die dann das niederdimensionale Volumen pro Zustand und die niederdimensionale Oberfläche des Radius  $k$  darstellen. Insgesamt sind also

$$\begin{aligned} D_{3D}(k) &= 8\pi k^2 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \quad , \\ D_{2D}(k) &= 4\pi k \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 \quad \text{und} \\ D_{1D}(k) &= 2 \frac{L}{2\pi} \quad . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Um die Zustandsdichte  $D(E)$  in Abhängigkeit der Energie der Zustände zu erhalten, formuliert man die rechte Seite der Gleichung 2.1 einmal mit den Index  $k$  und einmal mit  $E$ , woraus sich dann der Zusammenhang

$$D(E) = D(k(E)) \left( \frac{d}{dk} E(k) \right)^{-1} \quad (2.4)$$

herleiten lässt. Bei Verwendung der parabolischen Näherung ergibt sich für die Energie die Dispersionsrelation  $E(k) = \hbar^2 k^2 / (2m^*)$ , wobei  $m^*$  die effektive Masse der Elektronen und  $\hbar$  das reduzierte Wirkungsquantum sind. Dieser Ausdruck lässt sich in Gleichung 2.4 einsetzen, sodass folgt:

$$\begin{aligned} D_{3D}(E) &= 8\pi \sqrt{2E} \left( \frac{m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \quad , \\ D_{2D}(E) &= 4\pi \frac{m^*}{\hbar^2} \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 \quad \text{und} \\ D_{1D}(E) &= \sqrt{\frac{2m^*}{E\hbar^2}} \frac{L}{2\pi} \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Über die Zustandsdichte lässt sich auch die Fermi-Energie  $E_F$  eines Systems mit der räumlichen Ladungsträgerdichte  $n_e$  in Beziehung setzen. So gilt

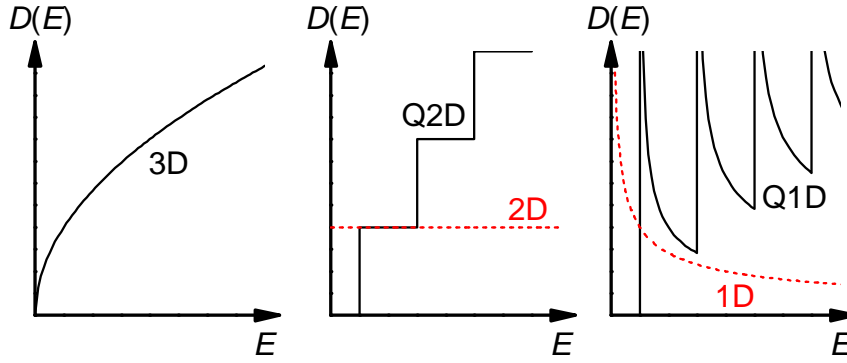


Abbildung 2.1: Zustandsdichten in 3D, 2D, Q2D, 1D und Q1D.

im 2D Fall  $n_e = N/L^2$ , während aus Gleichung 2.1  $N = D_{2D}E_F$  folgt. Zusammen ergibt sich:

$$2D : \quad E_F = \frac{\pi \hbar^2}{m^*} n_e \quad (2.6)$$

In der Realität gibt es keine idealen niederdimensionalen Systeme. Aber wenn die freie Beweglichkeit der Elektronen in einer oder mehreren Dimensionen auf einen mikroskopischen Bereich beschränkt ist, dann stellt das dafür verantwortliche Einschlusspotenzial für diese Raumrichtungen einen Quantentopf dar. Entsprechend bilden sich dort deutlich diskrete Energieniveaus aus, sodass die quasi-kontinuierliche Näherung für diese Dimensionen nicht mehr gilt. Solche Systeme werden als quasi-niederdimensional bezeichnet. Ihre Zustandsdichten können aber aus den Ausdrücken für die idealisierten Fälle zusammengesetzt werden, da man jedes quantisierte Niveau einzeln als ideal niederdimensional annähern kann. Damit ergibt sich für den quasi-eindimensionalen (Q1D) und den quasi-zweidimensionalen (Q2D) Fall, wenn  $E_n$  die Energie des  $n$ -ten Quantentopfniveaus und  $\Theta$  die Heaviside-Funktion sind:

$$D_{Q2D}(E) = 4\pi \frac{m^*}{\hbar^2} \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 \sum_n \Theta(E - E_n) \quad \text{und} \quad (2.7)$$

$$D_{Q1D}(E) = \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2}} \frac{L}{2\pi} \sum_{n|E_n < E} \frac{1}{\sqrt{E - E_n}} \quad .$$

Der Verlauf der bisher aufgeführten energieabhängigen Zustandsdichten wird in Abbildung 2.1 qualitativ gezeigt.

Da in einem idealen 0D System nur ein einziger Zustand der Energie  $E_0$  existiert, und ein quasi-0D System einen Quantentopf mit diskreten  $E_n$  darstellt, sind bei der Beschreibung keinerlei Kontinuums-Näherungen mehr anwendbar. Es gilt dann unter Berücksichtigung des Elektronenspins und wenn  $\delta$  die Dirac-Funktion darstellt:

$$D_{0D}(E) = 2\delta(E - E_0) \quad \text{und} \quad D_{Q0D}(E) = 2 \sum_n \delta(E - E_n) \quad . \quad (2.8)$$

## 2.2 Quantenpunkte

Ein leitfähiger Bereich, der von Potenzialbarrieren in allen Raumrichtungen auf eine Ausdehnungen begrenzt wird, die kleiner ist als die Wellenlänge der Elektronen im entsprechenden Material, bildet ein quasi-nulldimensionales System und wird als Quantenpunkt (QD) bezeichnet. Ist ein solcher Quantenpunkt über Tunnelbarrieren an elektrische Zuleitungen „Source“ (S) und „Drain“ (D) angekoppelt, so kann er mittels Transportspektroskopie untersucht werden.

Die wichtigsten Transporteigenschaften lassen sich dabei unter Verwendung eines elektrostatischen Modells erklären, welches die Ladung  $-e$  der Elektronen berücksichtigt, aber ihre quantenmechanische Wellennatur vernachlässigt. [61, 62] Der Quantenpunkt wird darin als strukturloses Gebilde angesehen, das durch seine Gesamtladung  $Q$  und seine Gesamtkapazität  $C_\Sigma$  gegenüber der Umwelt beschrieben wird. Um die Ladung auf dem Quantenpunkt zu erhöhen, ist aufgrund der Coulomb-Abstoßung für das Aufbringen jedes Elektrons eine um die Ladeenergie

$$E_L = \frac{e^2}{C_\Sigma} \quad (2.9)$$

höhere Energie notwendig, als für das vorhergehende. Daraus ergibt sich das sogenannte Additionsspektrum mit äquidistanten Niveaus, die relativ zum ersten aufgebrauchten Elektron bei den Energien

$$E_i = (i - 1)E_L \quad , \quad (2.10)$$

liegen, wobei  $i$  jeweils der Anzahl der Elektronen entspricht. Damit dieses Spektrum beobachtet werden kann, muss für die Temperatur  $T$  des Systems  $k_B T \ll E_L$  gelten. Außerdem muss der Widerstand  $R_T$  der Tunnelbarrieren  $R_T \gg h/e^2$  erfüllen, damit die Elektronen auf dem Quantenpunkt lokalisiert sind.

### 2.2.1 Coulomb-Blockade

Legt man eine geringe Spannung  $V_{SD}$  über die Zuleitungen an, so kann Transport über den Quantenpunkt stattfinden, wenn ein Niveau des Additionsspektrums im  $eV_{SD}$  breiten Fenster zwischen den chemischen Potenzialen  $\mu_S$  und  $\mu_D$  der Zuleitungen liegt. Variiert man die Spannung  $V_G$  an einem Gate, zu dem der Quantenpunkt die Kapazität  $C_G$  besitzt, so wird

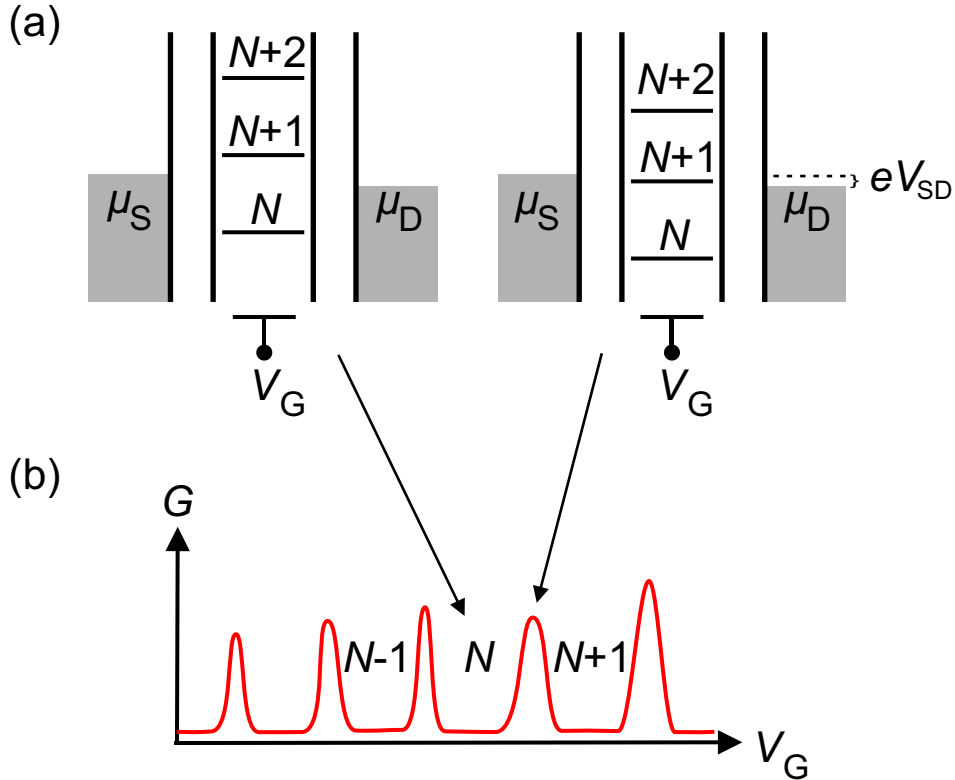


Abbildung 2.2: (a) Schematische Darstellung eines Quantenpunktes zwischen Tunnelbarrieren mit dahinterliegenden Zuleitungen, über die eine kleine Spannung  $V_{SD}$  angelegt ist.  $\mu_S$  und  $\mu_D$  sind die chemischen Potentiale in Source beziehungsweise Drain. Das gezeigte Additionsspektrum kann durch die Gatespannung  $V_G$  verschoben werden. Links liegt Coulomb-Blockade vor, während rechts Transport stattfindet. (b) Coulomb-Blockade-Oszillationen in der Leitfähigkeit  $G$  über die Zuleitungen in Abhängigkeit von  $V_G$ . Die Stellen, die den Darstellungen aus (a) entsprechen, sind markiert. Die Anzahl der Elektronen ist für drei der Blockade-Bereiche angegeben.

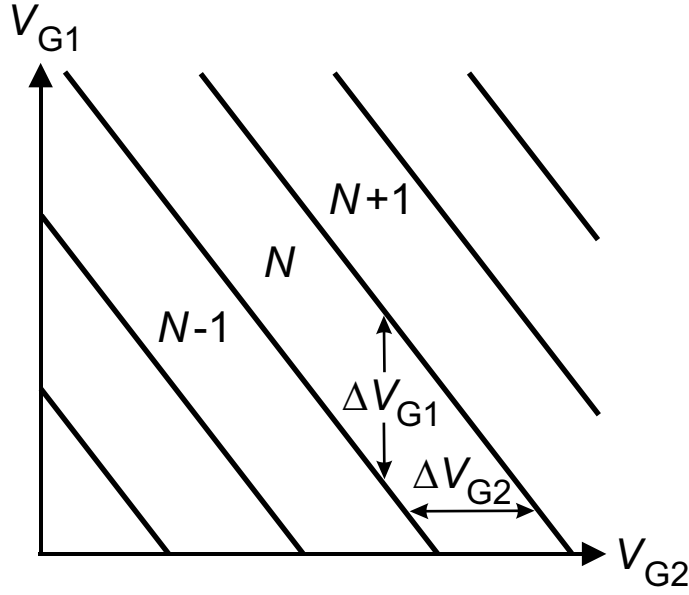


Abbildung 2.3: Schema des Ladungsdiagramms eines Quantenpunktes. Die Linien trennen die Coulomb-Blockade-Bereiche mit einer jeweils um eins verschiedenen Anzahl von Elektronen.

das Additionsspektrum derart verschoben, dass dann die Energie des  $i$ -ten Elektrons

$$E_i = E_{i0} - e \frac{C_G}{C_\Sigma} V_G \quad (2.11)$$

ist, wenn  $E_{i0}$  für das entsprechende unverschobene Niveau steht. Entsprechend lassen sich die Niveaus nacheinander durch das Transportfenster schieben, wobei jedesmal eine endliche differentielle Leitfähigkeit  $G$  gemessen werden kann. Ihr exakter Wert hängt dabei vom Überlapp der Wellenfunktionen auf dem QD und in den Zuleitungen, welcher gewöhnlich von Niveau zu Niveau variiert. Aber immer dann, wenn kein Niveau in Resonanz mit den Zuleitungen ist, verschwindet die Leitfähigkeit. Diese beiden Situationen sind in Abbildung 2.2 (a) schematisch dargestellt. Dort wird links der Fall gezeigt, in dem kein Niveau des Additionsspektrums im Transportfenster liegt, sodass die Anzahl der Elektronen auf dem Quantenpunkt konstant  $N$  beträgt. Rechts ist dagegen zu sehen, wie das nächste Niveau für  $N + 1$  Elektronen in Resonanz mit den Zuleitungen ist, so dass Elektronen von Source über den Quantenpunkt in einen unbesetzten Zustand in Drain gelangen können. Abbildung 2.2 (b) zeigt die sich ergebende differentielle Leitfähigkeit  $G$  über der Gatespannung  $V_G$ , wobei die den Dar-

stellungen aus (a) entsprechenden Stellen mit Pfeilen markiert sind. Da das regelmäßige Verschwinden der Leitfähigkeit auf die Coulomb-Abstoßung der auf dem Quantenpunkt befindlichen Ladung zurückzuführen ist, wird es als Coulomb-Blockade bezeichnet. Zusammen mit den bei Resonanz eines Niveaus mit den Zuleitungen auftretenden Peaks bildet es die Coulomb-Blockade-Oszillationen. Dabei gilt für den Abstand  $\Delta V_G$  zwischen den einzelnen Peaks:

$$\Delta V_G = \frac{e}{C_G} \quad (2.12)$$

Wird die differentielle Leitfähigkeit in Abhängigkeit von zwei an verschiedene Gates angelegten Spannungen  $V_{G1}$  und  $V_{G2}$  gemessen und in einem zweidimensionalen Plot dargestellt, dann ergibt sich das sogenannte Ladungsdiagramm, wie es schematisch in Abbildung 2.3 dargestellt ist. In diesem trennen äquidistante Linien die Blockade-Bereiche mit jeweils konstanter Elektronenzahl. Die in der Abbildung markierten Abstände  $\Delta V_{G1}$  und  $\Delta V_{G2}$  zwischen den Linien parallel zur  $V_{G1}$ - beziehungsweise  $V_{G2}$ -Achse liefern dabei nach Gleichung 2.12 jeweils die Kapazität zwischen dem Quantenpunkt und dem entsprechenden Gate.

### 2.2.2 Rautenmessung

Wird zusätzlich zu einer Gatespannung die über die Zuleitungen Source und Drain des Quantenpunktes angelegte Vorspannung  $V_{SD}$  variiert, so wird zum einen das Transportfenster  $eV_{SD}$  bei größeren Beträgen von  $V_{SD}$  weiter geöffnet. Zum anderen koppeln die Zuleitungen auch kapazitiv an den Dot. Daher verschiebt  $V_{SD}$ , wenn sie relativ zum Potenzial von Drain angegeben ist, die Niveaus des Additionsspektrums um  $-e(C_S/C_\Sigma)V_G$ , wenn  $C_S$  die Kapazität zwischen dem Quantenpunkt und Source ist. In der Darstellung der differentiellen Leitfähigkeit ergibt sich dann der in Abbildung 2.4 gezeigte Verlauf von Linien, die jeweils entweder die positive Steigung  $\beta_1$  oder die negative  $\beta_2$  besitzen. Ihre Schnittpunkte bei  $V_{SD} = 0$  V entsprechen dabei genau den im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Peaks. Da die Linien Änderungen in der Leitfähigkeit markieren und diese immer dann auftreten, wenn ein Niveau im Quantenpunkt gerade an  $\mu_S$  oder  $\mu_D$  vorbei geschoben wird, kann jeweils ein Satz von Linien der Resonanz mit einer der Zuleitungen zugeordnet werden. Dabei gilt für Resonanz eines Niveaus mit der Source-Seite  $E_i = \mu_S$ , was sich zu

$$E_{i0} - e \frac{C_G}{C_\Sigma} V_G - e \frac{C_S}{C_\Sigma} V_{SD} = \mu_D - eV_{SD} \quad (2.13)$$

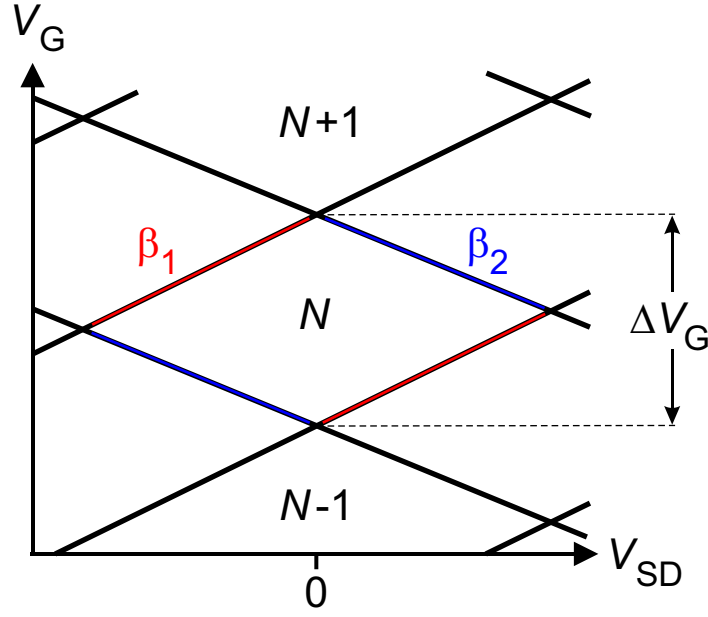


Abbildung 2.4: Das Rautenmuster, das sich in der Darstellung der differentiellen Leitfähigkeit eines Quantenpunktes bei Variation einer Gate-Spannung  $V_G$  und der Vorspannung  $V_{SD}$  ergibt. Die Seiten der zentralen Raute mit den Steigungen  $\beta_1$  (rot) und  $\beta_2$  (blau) sind jeweils hervorgehoben. Der Abstand  $\Delta V_G$  der Coulomb-Peaks aus Abbildung 2.3 sowie die Anzahl der Elektronen in drei Blockade-Bereichen sind an den entsprechenden Stellen angegeben.

ergibt, woraus durch Umstellen die Schar der Geradengleichungen

$$V_G = \frac{C_\Sigma - C_S}{C_G} V_{SD} + \frac{C_\Sigma}{eC_G} (E_{i0} - \mu_D) \quad (2.14)$$

für die entsprechende Sorte Linien folgt. Daran lässt sich die positive Steigung  $\beta_1 = \partial V_G / \partial V_{SD}$  ablesen:

$$\beta_1 = \frac{C_\Sigma - C_S}{C_G} \quad (2.15)$$

Ausgehend von der Bedingung  $E_i = \mu_D$  für Resonanz mit der Drain-Seite folgt ganz analog

$$\beta_2 = -\frac{C_S}{C_G} \quad (2.16)$$

für die negative Steigung. Damit erhält man aus  $\beta_2$  durch Einsetzen der über Gleichung 2.12 bestimmten Kapazität  $C_G$  zum Gate die Kapazität  $C_S$



zu Source. Ganz analog lässt sich  $C_D$  zu Drain erhalten, wenn in einer weiteren Messung die Spannung  $V_{SD}$  umgekehrt an den Zuleitungen angelegt wird. Außerdem ergibt die Kombination der Ausdrücke für die Steigungen  $\beta_1$  und  $\beta_2$

$$C_\Sigma = C_G(\beta_1 - \beta_2) \quad , \quad (2.17)$$

woraus unter Einsetzen von  $C_G$  die Gesamtkapazität  $C_\Sigma$  bestimmt werden kann.

### 2.2.3 Mehrfachquantenpunkte

#### Kapazitive Kopplung

Sind in einer Struktur zwei Quantenpunkte QD I und QD II miteinander kombiniert und liegen dicht beieinander, dann verschiebt Ladung auf einem der beiden aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung die Niveaus auf dem anderen. [63] Ist  $C_{I,II}$  die Kapazität der beiden Quantenpunkte zueinander und  $N_{II}$  die Anzahl der Elektronen auf QD II, so gilt für die Energieniveaus auf QD I:

$$E_{i,I} = E_{i0,I} + e^2 \frac{C_{I,II}}{C_{\Sigma,I}} \frac{N_{II}}{C_{\Sigma,II}} \quad (2.18)$$

Analog ergibt sich für die Niveaus des Spektrums von QD II:

$$E_{i,II} = E_{i0,II} + e^2 \frac{C_{I,II}}{C_{\Sigma,II}} \frac{N_I}{C_{\Sigma,I}} \quad (2.19)$$

Es ist zu erkennen, dass die Niveaus eines der Quantenpunkte immer dann einem Sprung um  $e^2 C_{I,II}/(C_{\Sigma,I} C_{\Sigma,II})$  unterliegen, wenn sich die Ladung auf dem jeweils anderen um ein Elektron ändert. Im Ladungsdiagramm der gesamten Struktur in Abhängigkeit von zwei Gatespannungen sorgt jeder der beiden Quantenpunkte für einen Satz Linien, der in etwa dem eines einzelnen Quantenpunktes entspricht. Da verschiedene Quantenpunkte unterschiedlich an vorhandene Gates ankoppeln, haben die beiden Sorten von Linien dabei unterschiedliche Steigungen. Da die Linien jeweils die Änderung der Ladung eines der Quantenpunkte um ein Elektron markieren, kommt es dort wie oben beschrieben im anderen Quantenpunkt zu einer Verschiebung der Niveaus. Entsprechend kommt es bei Überkreuzung von je einer Linie der zwei Quantenpunkte bei beiden zu einem Sprung. Eine solche Stelle wird in Abbildung 2.5 gezeigt, wobei die aneinandergrenzenden Bereiche konstanter Elektronenzahlen markiert sind. Es ist zu erkennen, dass an den entstehenden Ecken Bereiche drei verschiedener Elektronenkonfigurationen zusammentreffen. Diese Punkte werden daher als Tripelpunkte

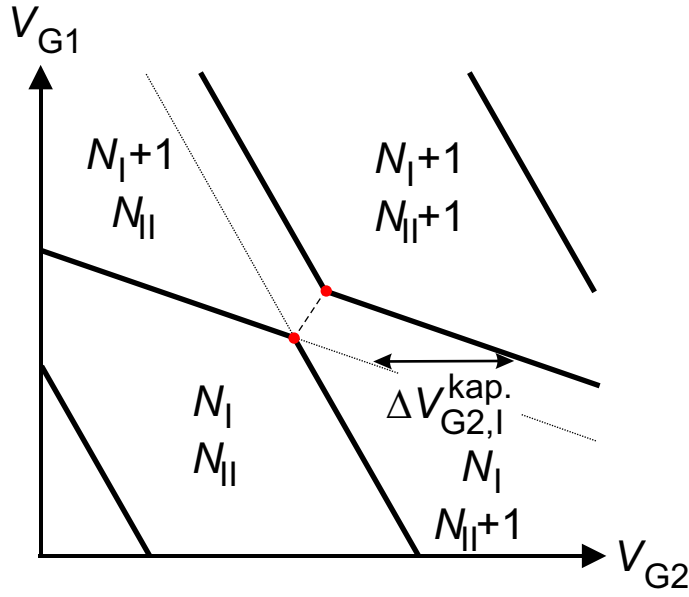


Abbildung 2.5: Teil des Ladungsdiagramms von zwei kapazitiv gekoppelten Quantenpunkten I und II. Der Linienvverlauf für den Fall ohne Kopplung ist gepunktet dargestellt. Die Weite des Sprungs parallel zur  $V_{G2}$ -Achse ist für eine der Linien von Quantenpunkt II markiert. Die Tripelpunkte sind rot gekennzeichnet. In den Blockade-Bereichen sind die Elektronenzahlen beider Dots angegeben.

bezeichnet. Aus der Ausprägung des Sprungs in einer Linie kann die Kapazität  $C_{I,II}$  der Quantenpunkte zueinander bestimmt werden. So entspricht der in Abbildung 2.5 markierte Abstand  $\Delta V_{G2,I}^{\text{kap.}}$  parallel zur  $V_{G2}$ -Achse der Energiedifferenz  $e(C_{G2,I}/C_{\Sigma,I})\Delta V_{G2,I}^{\text{kap.}}$ , die die Niveauverschiebung um  $e^2 C_{I,II}/(C_{\Sigma,I}C_{\Sigma,II})$  ausgleicht. Damit ergibt sich:

$$C_{I,II} = \frac{C_{G2,I}C_{\Sigma,II}}{e} \Delta V_{G2,I}^{\text{kap.}} \quad (2.20)$$

### Tunnelkopplung

Ermöglicht es der Aufbau der Struktur einem Elektron, zwischen den Quantenpunkten zu tunneln, so kann sich die Wellenfunktion delokalisiert über beide ausdehnen. Aus Zuständen  $\psi_I$  und  $\psi_{II}$  der einzelnen Dots werden dabei ein symmetrischer und ein antisymmetrischer Zustand  $\psi_+$  beziehungs-

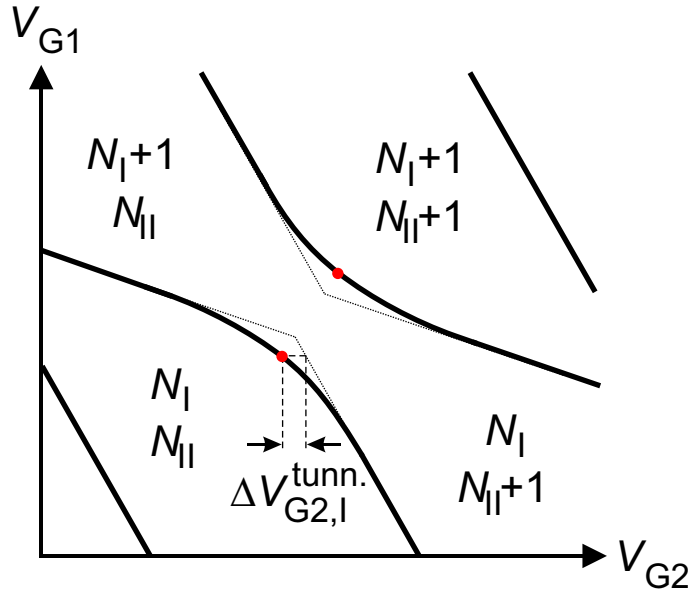


Abbildung 2.6: Das Ladungsdiagramm aus Abbildung 2.5, wenn zusätzlich eine Tunnelkopplung zwischen den Quantenpunkten vorliegt. Der Abstand eines der verschobenen Tripelpunkte parallel zur  $V_{G2}$ -Achse ist markiert. Der Linienverlauf für den Fall ohne Tunnelkopplung ist gepunktet dargestellt.

weise  $\psi_-$  des „Quantenpunkt-Moleküls“, für die gilt:

$$\begin{aligned}\psi_+ &= c_I \psi_I + c_{II} \psi_{II} \quad \text{und} \\ \psi_- &= c_I \psi_I - c_{II} \psi_{II} \quad .\end{aligned}\tag{2.21}$$

Die Faktoren  $c_I$  und  $c_{II}$  sind dabei von der Energiedifferenz zwischen den Zuständen der Einzelquantenpunkte abhängig, sodass der symmetrische Molekülzustand mit zunehmender Verstimmung allmählich in jeweils den Einzelquantenpunktzustand übergeht, der energetisch günstiger als der andere ist, während es beim antisymmetrischen Molekülzustand umgekehrt ist. Bei den Linien im Ladungsdiagramm kommt es daher zusätzlich zu den Sprüngen aufgrund der schon beschriebenen kapazitiven Kopplung zu dem in Abbildung 2.6 dargestellten Verlauf. Weil der symmetrische Zustand energetisch tiefer als beide Einzelquantenpunktzustände liegt, findet eine Resonanz mit den Zuleitungen schon bei geringeren Gatespannungen statt, als es bei ungekoppelten Quantenpunkten der Fall wäre. Da der Molekülzustand und damit diese Differenz umso ausgeprägter ausfällt, je dichter die Energien der Einzelquantenpunktzustände beieinander liegen, kommt es zu

keinem weiteren Sprung, sondern zu der rot markierten Abrundung in der Nähe des Punktes, an dem die Einzelquantenpunktzustände in Resonanz liegen. Nach dem Besetzen eines symmetrischen Molekülzustandes wird für das Aufbringen des nächsten Elektrons eine höhere Energie benötigt als im Fall ungekoppelter Quantenpunkte, weil damit die Energiedifferenz bis zum nächsten Zustand überwunden werden muss, die natürlich umso größer ausfällt, je tiefer der zuletzt besetzte Zustand liegt. Entsprechend entsteht bei der nächsten Resonanz die blau markierte Kurve, die symmetrisch zur rot markierten verläuft. Insgesamt bildet sich damit ein abgerundetes Anticrossing. Aus der Lage eines der dadurch verschobenen Tripelpunkte kann die energetische Aufspaltung der Molekülzustände bestimmt werden. So entspricht der in Abbildung 2.6 markierte Abstand  $\Delta V_{\text{G2,I}}^{\text{tunn.}}$  parallel zur  $V_{\text{G2}}$ -Achse der Energiedifferenz  $e(C_{\text{G2,I}}/C_{\Sigma,\text{I}})\Delta V_{\text{G2,I}}^{\text{tunn.}}$ , um die der symmetrische Molekülzustand bei Resonanz der Einzelquantenpunktzustände tiefer liegt. Da dieser Wert gerade die Hälfte der Aufspaltung  $\Delta E_{+,-}$  der Molekülzustände bei maximaler Ausprägung ist, folgt daraus:

$$\Delta E_{+,-} = 2e \frac{C_{\text{G2,I}}}{C_{\Sigma,\text{I}}} \Delta V_{\text{G2,I}}^{\text{tunn.}} \quad (2.22)$$

Werden mehr als zwei Quantenpunkte in einer Struktur miteinander kombiniert, so bilden die dann zahlreicheren Linien im Ladungsdiagramm noch kompliziertere Kreuzungsmuster. Dabei können zum Beispiel bei drei gekoppelten Quantenpunkten auch Quadrupelpunkte auftreten, an denen vier Bereiche unterschiedlicher Elektronenkonfiguration zusammentreffen.

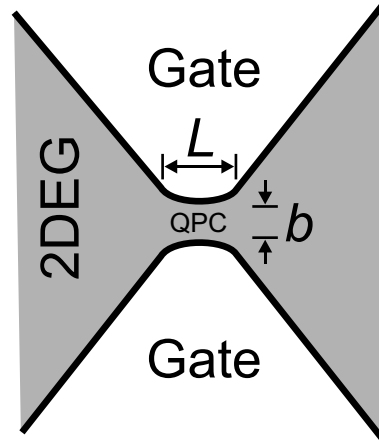


Abbildung 2.7: Ein Quantenpunktkontakt der Länge  $L$  als Engstelle in einem 2DEG mit durch angrenzende Gates einstellbarer elektronischer Breite  $b$ .

## 2.3 Quantenpunktkontakte

Schränkt man die Elektronen in einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG) in nur einer weiteren Dimension ein, so erhält man einen 1D Kanal. Eine Engstelle, die eine solche 1D Verbindung zwischen zwei Teilen eines 2DEG bildet, ist schematisch in Abbildung 2.7 dargestellt. Über neben der Engstelle gelegene Gates kann ihre effektive elektronische Breite  $b$  beeinflusst werden, indem eine Gatespannung angelegt wird. Durch eine genügend negative Gatespannung kann der Kanal dabei auch komplett verarmt werden, sodass elektronischer Transport durch die Engstelle nur noch über den Tunneleffekt möglich ist. Wenn aber ein leitende Verbindung vorliegt und ihre Länge  $L$  klein gegen die Kohärenzlänge der Elektronen ist, so können Elektronen den Bereich ballistisch durchqueren. Eine solche Engstelle wird als Quantenpunktkontakt (QPC) bezeichnet.

Aufgrund der zusätzlichen Einschränkung innerhalb des 2DEG bilden sich innerhalb des QPC eindimensionale Subbänder aus. Dort, wo ein solches Subband die Fermi-Energie schneidet, entsteht jeweils ein Transportkanal. Sind  $N$  Kanäle vorhanden und ist  $\tau_i$  der Transmissionskoeffizient des  $i$ -ten Kanals, dann ist die Gesamtleitfähigkeit durch die Zweipunkt-Landauer-Formel [64]

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{i=1}^N \tau_i \quad (2.23)$$

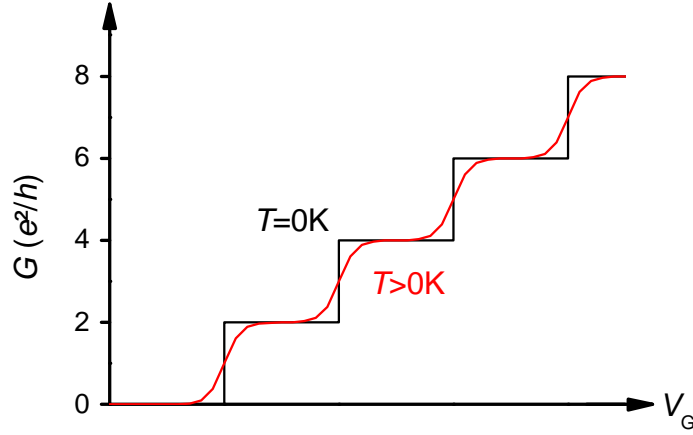


Abbildung 2.8: Die Leitfähigkeit  $G$  eines Quantenpunktkontaktes bei der Temperatur  $T = 0\text{ K}$  (schwarz) und bei  $T > 0\text{ K}$  (rot) über einer Gate-Spannung  $V_G$ .

gegeben, wobei  $e$  die Elementarladung und  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum sind. Der Vorfaktor 2 berücksichtigt die Spinentartung. Im ballistischen Regime kann für  $t_i = 1$  für alle  $i$  angenommen werden, sodass sich die Formel zu

$$G = \frac{2e^2}{h} N \quad (2.24)$$

vereinfacht. Da die Anzahl  $N$  der Transportkanäle von  $E_F$  abhängt, der Lage der Fermi-Energie relativ zum QPC, hat die Leitfähigkeit aufgetragen über  $E_F$  einen stufenförmigen Verlauf. Entsprechendes gilt für die Auftragung über eine angelegte Gatespannung  $V_G$ , wie in Abbildung 2.8 gezeigt ist, da sich  $E_F$  proportional mit  $V_G$  verschiebt.

Dabei ist zu beachten, dass sich exakte Stufen nur bei der Temperatur  $T = 0\text{ K}$  ergeben, was in Abbildung 2.8 bei der schwarzen Kurve zu sehen ist. Bei höheren Temperaturen treten wegen des Aufweichens der Fermi-Kante ebenfalls aufgeweichten Übergängen zwischen den einzelnen Plateaus auf, wie durch die rote Kurve dargestellt wird.

Da die Leitfähigkeit eines Quantenpunktkontaktes auch von anderen geladene Bereichen in seiner Nähe wie durch ein Gate beeinflusst werden kann, eignet er sich als Ladungsdetektor. [65, 66] So entspricht eine Umladung in beispielsweise einer benachbarten Quantenstruktur effektiv einer plötzlichen Verschiebung der Kurve der gatespannungsabhängigen Leitfähigkeit des QPC parallel zur Abszisse. Wurde der QPC zuvor auf einen Arbeitsbereich zwischen zwei Plateaus eingestellt, wo die Kurve eine

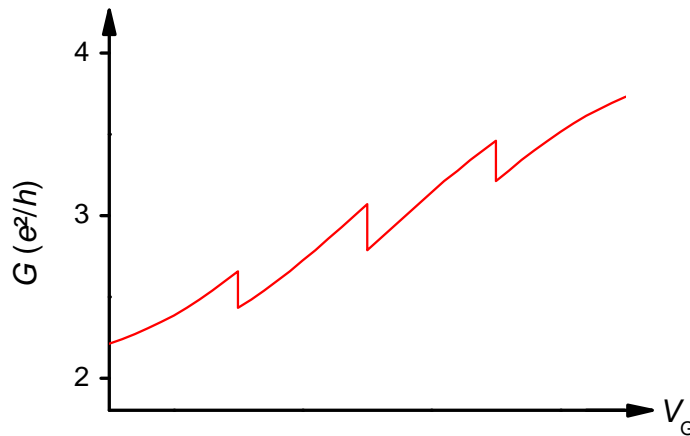


Abbildung 2.9: Die Leitfähigkeit  $G$  eines Quantenpunktkontaktes zwischen dem ersten und zweiten Plateau, während durch das Verändern von  $V_G$  in der Nähe nacheinander mehrere Umladungen auftreten.

große Steigung besitzt, ist im QPC-Signal bei einer solchen Umladung ein deutlicher Sprung zu erkennen. Werden Umladungen in benachbarten Gebieten durch das Verändern einer Gatespannung ausgelöst, so überlagern sich die entsprechenden Sprünge mit der kontinuierlichen Beeinflussung des QPC durch das verfahrenen Gate. In der abhängig von diesem Gate aufgetragenen Leitfähigkeit kennzeichnen dann kleine Zacken die auftretenden Umladungen, wie es in Abbildung 2.9 dargestellt ist.

## 2.4 Quantenringe

Ein Quantenring ist eine im Idealfall eindimensionale Leiterbahn, die die Form eines Rings mit mesoskopischen Abmessungen bildet. Ist dieser Ring an zwei Stellen mit externen Zuleitungen verbunden, so ergeben sich für ein Elektron in der einen Zuleitung zwei mögliche Wege, um zur anderen zu gelangen. Da Elektronen in der Quantenmechanik durch eine Wellenfunktion beschrieben werden, wirkt dann ein solcher Ring wie ein Strahlteiler, der die Wellenfunktion auf die beiden möglichen Wege aufteilt und am Ausgang mit sich selbst interferieren lässt. Ob konstruktive oder destruktive Interferenz vorliegt, wird dabei von der Phasendifferenz zwischen den überlagerten Teilen der Wellenfunktion bestimmt. Unterliegt ein Quantenring also einem Einfluss, der die Phasenlage der Wellenfunktion in den Armen relativ zu einander verschiebt, dann kann dies über die Interferenz am Ausgang indirekt beobachtet werden. Daher bietet ein auf diese Art

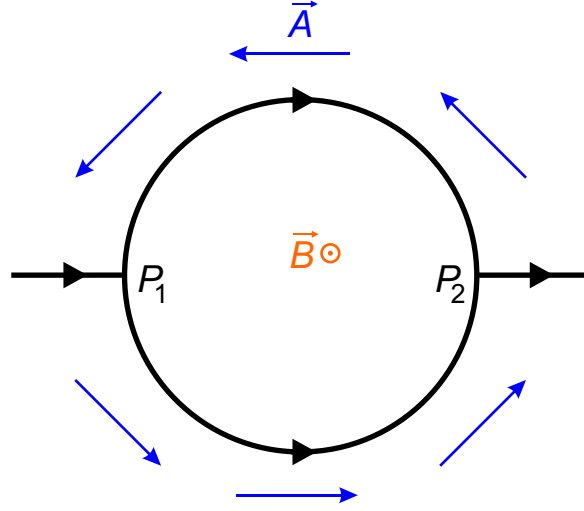


Abbildung 2.10: Das Schema eines Quantenrings. Eine am Punkt  $P_1$  eintretende Wellenfunktion spaltet sich auf und ihre Teile interferieren am Ausgang bei  $P_2$ .

als Interferometer funktionierender Quantenring die Möglichkeit, Einflüsse auf die selbst prinzipiell nicht absolut bestimmbare quantenmechanische Phase experimentell zu untersuchen.

### 2.4.1 Der Aharonov-Bohm-Effekt

Der Aharonov-Bohm-Effekt [40, 67, 68] beruht darauf, dass ein Elektron beim Vorhandensein eines Magnetfeldes entlang einer Bahn  $\mathcal{C}$  die quantenmechanische Phase

$$\varphi = \frac{e}{\hbar} \int_{\mathcal{C}} d\vec{s} \cdot \vec{A} \quad (2.25)$$

aufammelt, wobei  $\hbar$  das reduzierte Wirkungsquantum und  $e$  die Elementarladung sind. Des Weiteren ist  $\vec{A}$  das Vektorpotenzial, dessen Rotation das Magnetfeld  $\vec{B}$  ist, sodass als Zusammenhang gilt:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.26)$$

Einen idealen Quantenring, der an zwei Zuleitungen gekoppelt ist, wie es in Abbildung 2.10 schematisch gezeigt ist, kann man als eine geschlossene Kurve  $\mathcal{C}_0$  beschreiben, die durch zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  in die Pfade  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  zerlegt wird. Laufen die beiden Teile einer bei  $P_1$  aufgespaltenen Wellenfunktion jeweils entlang  $\mathcal{C}_1$  beziehungsweise  $\mathcal{C}_2$  nach  $P_2$ , dann gilt



gemäß Gleichung 2.25 für die Phasendifferenz  $\Delta\varphi$ , die bei der Überlagerung in  $P_2$  vorliegt:

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi &= \frac{e}{\hbar} \int_{P_1, \mathcal{C}_1}^{P_2} d\vec{s} \cdot \vec{A} - \frac{e}{\hbar} \int_{P_1, \mathcal{C}_2}^{P_2} d\vec{s} \cdot \vec{A} \\
 &= \frac{e}{\hbar} \left( \int_{P_1, \mathcal{C}_1}^{P_2} d\vec{s} \cdot \vec{A} + \int_{P_2, \mathcal{C}_2}^{P_1} d\vec{s} \cdot \vec{A} \right) \\
 &= \frac{e}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}_0} d\vec{s} \cdot \vec{A}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Unter Verwendung des Satzes von Stokes und der Gleichung 2.26 folgt daraus weiter, wenn  $\mathcal{F}$  die von  $\mathcal{C}_0$  umschlossene Fläche ist und  $\Phi$  der Betrag des Magnetischen Flusses senkrecht durch  $\mathcal{F}$  ist:

$$\Delta\varphi = \frac{e}{\hbar} \int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 2\pi \frac{e}{h} \int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot \vec{B} = 2\pi \frac{e}{h} \Phi \tag{2.28}$$

Es ist dabei direkt zu erkennen, dass die  $\Delta\varphi$  genau dann ein Vielfaches von  $2\pi$  ist, wenn  $\Phi$  ein Vielfaches von  $h/e$ , also des magnetischen Flussquantums  $\Phi_0$ , ist. Die aus der Phasendifferenz resultierende Interferenz und damit auch die Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei  $P_2$  ist also über dem magnetischen Fluss durch die umschlossene Fläche periodisch mit  $h/e$ . Da bei einem Quantenring die Kopplung an die Zuleitung an seinem Ausgang von der dortigen Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen abhängt, kommt es auch in seiner Transmission und damit seiner Leitfähigkeit zu Aharonov-Bohm-Oszillationen mit derselben Periode.

Wenn das Magnetfeld senkrecht zur Ebene des Rings steht, es über der ganzen umschlossenen Fläche einen konstanten Betrag hat und  $F$  der umschlossene Flächeninhalt ist, gilt für die Periode  $\Delta B$  der Interferenz über der magnetischen Flussdichte  $B$  die Beziehung

$$\Delta B = \frac{h}{eF} \quad . \tag{2.29}$$

Für eine kreisförmige Bahn des Radius  $r_0$  mit  $F = \pi r_0^2$  folgt daraus der Zusammenhang

$$r_0 = \sqrt{\frac{h}{e\pi\Delta B}} \quad . \tag{2.30}$$

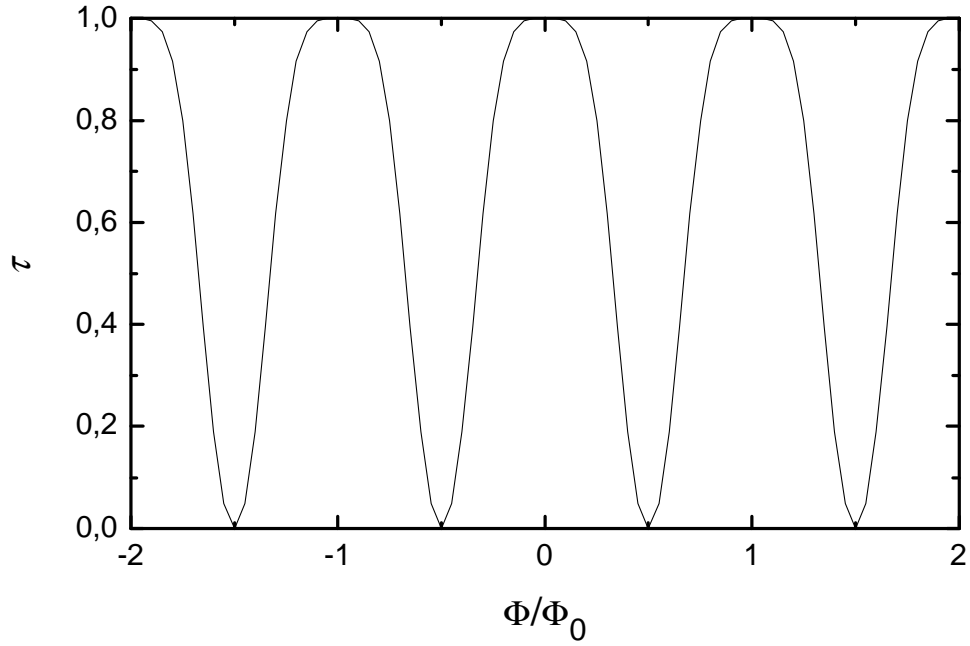


Abbildung 2.11: Die Transmission eines symmetrischen Rings in Abhängigkeit des umschlossenen magnetischen Flusses  $\Phi$ .

Die Transmission durch einen Quantenring wird berechnet, indem sie unter Verwendung einer Streumatrix beschrieben wird. Damit ergibt sich für einen symmetrischen Ring in Abwesenheit von elastischer Streuung der Transmissionskoeffizient [69, 70]

$$\tau = \frac{4\epsilon^2 \sin^2(\chi) \cos^2(\theta)}{[a^2 + b^2 \cos(2\theta) - (1 - \epsilon) \cos(2\chi)]^2 + \epsilon^2 \sin^2(2\chi)} \quad . \quad (2.31)$$

Hierbei steht  $\theta$  für den Term  $\pi\Phi/\Phi_0$ ,  $\epsilon$  ist ein Maß der Streuung an Ein- und Ausgang des Rings und  $\chi = k_F L$  ist das Produkt aus der Fermi-Kreiswellenzahl  $k_F$  mit  $L$ , der Hälfte des Ringumfangs.  $a^2$  und  $b^2$  sind Koeffizienten, die aus der Streumatrix folgen, und hängen von  $\epsilon$  ab. Für einen Quantenring, der über offenen Punktkontakte im ballistischen Regime an die Zuleitungen gekoppelt ist, gilt  $\epsilon = 0,5$ . Daraus folgt dann  $a^2 = 0,25$  und  $b^2 = 0,25$ . In Abbildung 2.11 ist  $\tau$  für  $\chi = \pi/4$  in Abhängigkeit des magnetischen Flusses  $\Phi$  durch den Ring dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, dass sich auch hier eine Oszillation mit der Periode  $\Phi_0 = h/e$  ergibt. Die Amplitude von  $\tau$  schwankt zwischen 0 und 1, da die Kohärenzlänge als unendlich angenommen wird. Wenn sich aber Streuzentren im Ring befinden,

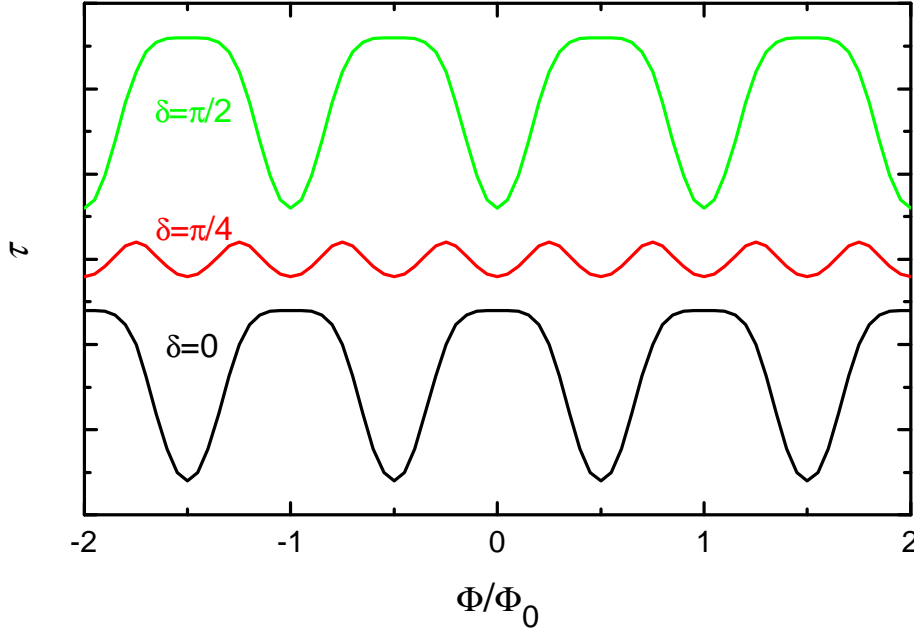


Abbildung 2.12: Die Transmission durch einen asymmetrischen Ring für drei Werte von  $\delta$ . Die Kurven sind zur besseren Übersicht gegeneinander verschoben.

die die Kohärenz zerstören können, so führt dies zu einer Verringerung der Amplitude.

Bei einem asymmetrischen Ring, zwischen dessen Armen eine Längendifferenz  $\Delta L$  besteht, muss in der Beschreibung zusätzlich noch die dadurch hinzukommende Phasendifferenz  $k_F \Delta L$  berücksichtigt werden. Definiert man einen Asymmetrieparameter  $\delta$  als den halben Wert dieses Terms, dann ergibt sich für  $\tau$  der Ausdruck [70–72]

$$\tau = \frac{4\epsilon^2 [\sin^2(\chi) \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \sin^2(\delta) - \sin^2(\chi) \sin^2(\delta)]}{[a^2 \cos(2\delta) + b^2 \cos(2\theta) - (1 - \epsilon) \cos(2\chi)]^2 + \epsilon^2 \sin^2(2\chi)} \quad , \quad (2.32)$$

der im symmetrischen Fall mit  $\delta = 0$  wieder die Form der Gleichung 2.31 annimmt.  $\tau$  ist mit  $\chi = \pi/4$  für die Werte  $\delta = 0, \pi/4$  und  $\pi/2$  in Abbildung 2.12 dargestellt. Dabei ergibt sich für  $\delta = 0$  entsprechend wieder die Kurve aus Abbildung 2.11, während mit  $\delta = \pi/2$ , also einer zusätzlichen Phasenverschiebung zwischen den Armen von  $2\delta = \pi$ , diese Kurve mit vertauschten Maxima und Minima vorliegt. Für den dazwischenliegenden Wert  $\delta = \pi/4$  ergibt sich eine Oszillation mit reduzierter Amplitude aber verdoppelter Frequenz.

### 2.4.2 Der elektrische Aharonov-Bohm-Effekt

Es wirkt sich sowohl bei symmetrischen als auch asymmetrischen Ringen ebenfalls auf die Phasendifferenz zwischen den Armen aus, wenn die Fermi-Energie  $E_F$  und damit die Fermi-Kreiswellenzahl  $k_F$  der Elektronen nicht wie oben angenommen konstant über den gesamten Umfang des Rings ist. So lässt sich  $E_F$  beispielsweise durch Anlegen einer Gatespannung asymmetrisch in den Armen des Rings beeinflussen. Die entsprechende Abhängigkeit der Interferenz am Ausgang vom so erzeugten elektrostatischen Potenzial wird auch als elektrischer Aharonov-Bohm-Effekt bezeichnet und beruht darauf, dass ein Elektron beim Aufenthalt in einem elektrischen Skalarpotenzial einer zusätzliche Phasenverschiebung unterliegt. [72–76] Ist  $\phi$  ein solches Potenzial, dann gilt für die in einem Zeitraum  $\mathcal{T}$  zusätzlich aufgesammelte Phase  $\varphi$ , wenn  $e$  die Elementarladung und  $\hbar$  das reduzierte Wirkungsquantum sind:

$$\varphi = \frac{e}{\hbar} \int_{\mathcal{T}} dt \phi \quad (2.33)$$

Geht man in semiklassischer Betrachtung davon aus, dass sich ein Elektron an der Fermi-Kante im Zeitraum  $\mathcal{T}$  mit der Fermi-Geschwindigkeit  $v_F$  entlang einer Bahn  $\mathcal{C}$  bewegt, so ergibt daraus sich wegen  $v_F = ds/dt$ :

$$\varphi = \frac{e}{\hbar} \int_{\mathcal{C}} ds \frac{\phi}{v_F} \quad (2.34)$$

Liegt in einem Arm eines Quantenrings ein Bereich der Länge  $L$  auf einem konstant um  $\Delta\phi$  höheren elektrischen Potenzial als der Rest der Struktur, so ergibt sich für die zusätzliche Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  zwischen beiden Armen am Ausgang des Rings [76]:

$$\Delta\varphi = \frac{e\Delta\phi}{\hbar v_F} L \quad (2.35)$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass die Energie  $e\Delta\phi$  kleiner ist als der unveränderte Wert von  $E_F$ , sodass die Fermi-Geschwindigkeit unabhängig von  $\Delta\phi$  konstant als

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m^*}} \quad (2.36)$$

angenommen werden kann, wobei  $m^*$  die effektive Masse eines Elektrons ist. Wird das elektrische Potenzial im Arm eines Quantenrings selektiv durch ein hinter einer Barriere liegendes Gate beeinflusst, so gilt zwischen

der Gatespannung  $V_G$  und dem dadurch zusätzlich hervorgerufenen Potenzial  $\Delta\phi$  im Arm des Ring der Zusammenhang

$$\Delta\phi = \alpha_G V_G \quad , \quad (2.37)$$

wobei  $\alpha_G$  der Hebelfaktor des Gates ist. Damit lässt sich unter Verwendung von Gleichung 2.35 der Wert  $\Delta V_G$  bestimmen, um den die Gatespannung variiert werden muss, damit sich die Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  zwischen den Armen des Rings um  $2\pi$  ändert. Es ergibt sich unter Ausnutzen der Beziehung  $\hbar = h/(2\pi)$ :

$$\Delta V_G = \frac{\hbar v_F}{e \alpha_G L} \quad (2.38)$$

Dieser Wert stellt also die zu Periodizität des elektrischen Aharonov-Bohm-Effektes über der Gatespannung dar. Entsprechend bedeutet eine Änderung der Gatespannung um  $\Delta V_G/2$  einen Phasensprung um  $\pi$  in den Oszillationen des magnetischen Aharonov-Bohm-Effektes.

### 2.4.3 Spektrum

Für die Niveaus in einem ideal eindimensionalen Ring gilt, wenn der umschlossene magnetische Fluss  $\Phi$  als Anzahl  $m$  von Flussquanten  $\Phi_0$  angegeben ist [77, 78]:

$$E_{l,m} = \frac{\hbar^2}{2m^* r_0^2} (m + l)^2 \quad (2.39)$$

Dabei ist  $\hbar$  das reduzierte Wirkungsquantum,  $m^*$  die effektive Masse eines Elektrons,  $r_0$  der Radius des Rings und  $l$  die Quantenzahl des Drehimpulses. Abbildung 2.13 zeigt einen Ausschnitt des entsprechend berechneten theoretischen Spektrums über dem magnetischen Fluss durch den Ring. Dabei bilden die Zustände für jedes  $l$  eine Parabel mit dem Minimum bei  $\Phi = -l\Phi_0$ . Aufgrund der untersten Schnittpunkte zwischen diesen Parabeln bei halbzahligen Werten von  $\Phi/\Phi_0$  bedeutet eine Änderung von  $m$  zu  $m + 1$  einen Wechsel des Grundzustandes von  $l$  nach  $l - 1$ . Daher oszilliert die Grundzustandsenergie in einem senkrecht zur Ebene des Rings stehenden Magnetfeld mit einer Periode von  $h/e$  über dem eingeschlossenen Fluss. Dies stellt einen deutlichen Gegensatz zu einem Quantenpunkt mit topologisch einfach verbundener Geometrie dar, bei dem der Grundzustand mit  $n = 0$  und  $l = 0$  konstant derselbe bleibt.

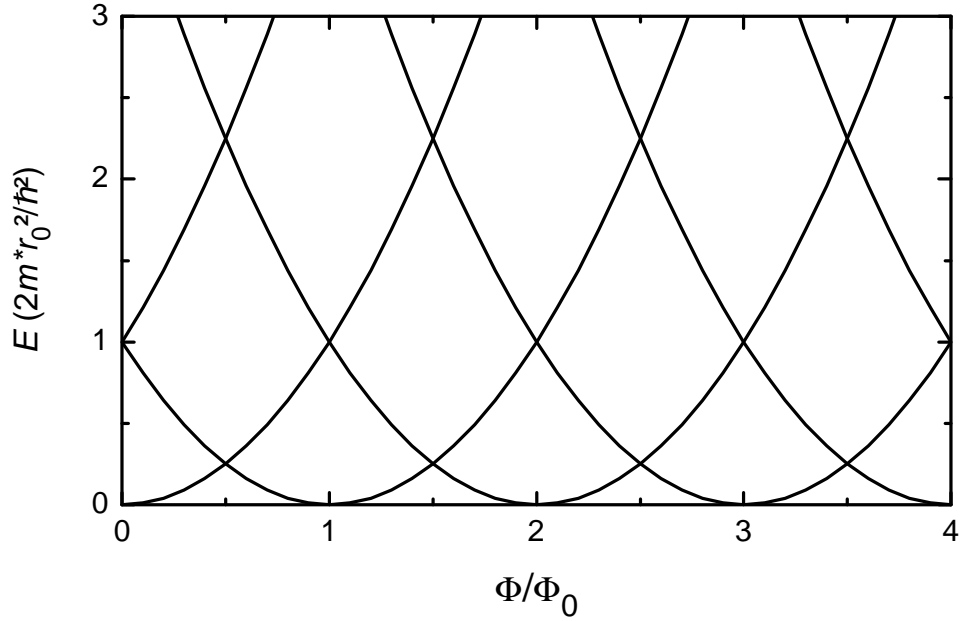


Abbildung 2.13: Das Spektrum eines Quantenrings mit dem Radius  $r_0$  über dem umschlossenen magnetischen Fluss  $\Phi$ . Jede Parabel entspricht einem Zustand mit fester Drehimpulsquantenzahl  $l$ .

## 2.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die theoretische Beschreibung der in dieser Arbeit untersuchten Quantenstrukturen erläutert.

Dazu wurde zuerst allgemein auf die Zustandsdichten niederdimensionaler Elektronensysteme eingegangen. Als nächstes folgte die Betrachtung von Transporteigenschaften einzelner und gekoppelter Quantenpunkte. Insbesondere wurde dabei gezeigt, wie sich entsprechende Strukturen über den Verlauf von Coulomb-Blockade-Linien charakterisieren lassen. Danach wurde beschrieben, wie sich ein Quantenpunktkontakt als Detektor zur Beobachtung von Umladungen in benachbarten Quantenstrukturen einsetzen lässt. Der letzte Abschnitt konzentrierte sich dann auf Quantenringe. Dort wurde zunächst auf den in solchen Ringen auftretenden Aharonov-Bohm-Effekt und die Beeinflussung der Interferenz durch verschiedene Parameter eingegangen. Zuletzt wurde das Spektrum eines idealen Quantenrings gezeigt.

Insgesamt enthält dieses Kapitel Grundlagen, auf die in den weiteren Kapiteln an den entsprechenden Stellen zurückgegriffen wird.

# Kapitel 3

## Probenherstellung und Messaufbau

Dieses Kapitel beschreibt die Herstellung der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Proben und die technische Seite der durchgeführten Messungen. Dazu wird zuerst auf die Grundlagen der Realisierung eines zweidimensionalen Elektronengases (2DEG) [79] durch die geschickte Anordnung von Schichten in einer Halbleiter-Heterostruktur [11] eingegangen. Dann werden die drei Heterostrukturen vorgestellt, die die Basis für die in den folgenden Kapiteln beschriebenen Proben bilden. Anschließend wird dargestellt, wie durch optische Lithografie Mesa-Strukturen erzeugt werden und wie Nanostrukturen durch Lithografie mit einem Rasterkraftmikroskop (AFM) entstehen. Der folgende Abschnitt beschreibt die Kryostaten, in welchen die Proben auf die zur Untersuchung der quantenmechanischen Effekte notwendigen tiefen Temperaturen gekühlt wurden und in welchen über supraleitende Spulen hohe Magnetfelder erzeugt werden konnten. Ein weiterer Abschnitt stellt dann den Aufbau der verwendeten Messgeräte vor.

### 3.1 Erzeugung eines 2DEG

Ausgangspunkt für die Herstellung der in dieser Arbeit beschriebenen Nanostrukturen sind Chips, die aus Schichten von Galliumarsenid (GaAs) und Aluminiumgalliumarsenid (AlGaAs) aufgebaut sind und bei Temperaturen von wenigen Kelvin in einer Tiefe von wenigen zehn Nanometern unter der Oberfläche ein zweidimensionales Elektronengas ausbilden. Denn mit Hilfe der in Abschnitt 3.4 beschriebenen AFM-Lithografie ist es dann relativ einfach, mit hoher Genauigkeit isolierende Linien in der 2DEG-Ebene zu erzeugen und so eine Einschränkung der Elektronen auf Bereiche noch niedrigerer Dimension zu erreichen.

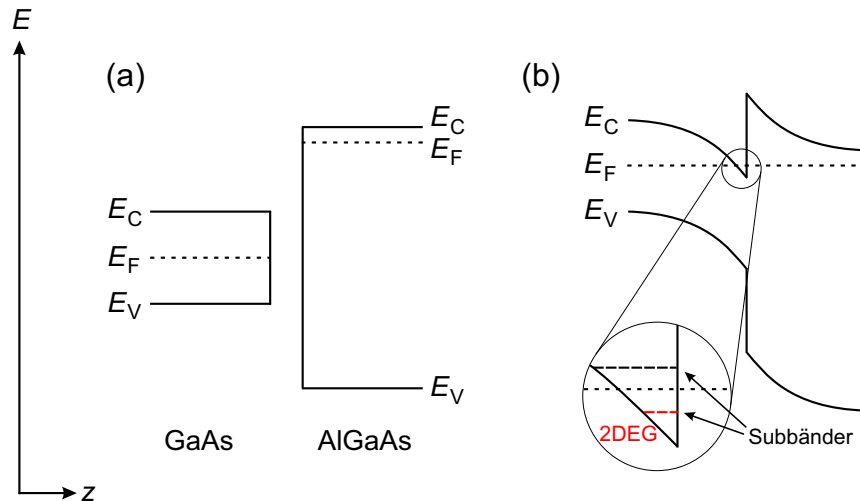


Abbildung 3.1: (a) Verlauf der Bandkanten in GaAs und dotiertem AlGaAs. (b) Entstehung eines 2DEG an der Grenzfläche zwischen diesen Materialien in einer Heterostruktur.

Halbleiter-Heterostrukturen werden hergestellt, indem durch beispielsweise Molekularstrahlepitaxie ausgehend von einem Substrat verschiedene Halbleiter-Materialien schichtweise aufeinander aufgewachsen werden. Wenn diese unterschiedliche Bandlücken aufweisen, kann durch die richtige Auswahl von Dotierung und Schichtfolge erreicht werden, dass sich senkrecht zur Wachstumsrichtung ein Verlauf der Leitungsbandkante ergibt, der einen Potenzialtopf enthält. Dort bilden sich quantisierte Energieniveaus (Subbänder) aus, von denen durch entsprechende Dotierung nur das erste bei tiefen Temperaturen unterhalb der Fermi-Kante liegt, sodass sich dann nur dort Leitungselektronen ansammeln. Es entsteht in der Ebene des Quantentopfes also ein 2DEG, dessen Elektronen sich lediglich senkrecht zur Wachstumsrichtung frei bewegen können.

Die Kombination von Galliumarsenid und Aluminiumgalliumarsenid ist für die Herstellung von Heterostrukturen besonders geeignet, da die Gitterkonstanten  $a_{\text{GaAs}} = 0,56533 \text{ nm}$  und  $a_{\text{AlAs}} = 0,56611 \text{ nm}$  [80] fast identisch sind. Außerdem lässt sich der Verlauf der Bandkante in der fertigen Heterostruktur während der Herstellung sehr gut beeinflussen, da die Bandlücke in AlGaAs vom Aluminium-Anteil abhängt und darüber eingestellt werden kann.

In Abbildung 3.1 ist die Entstehung eines 2DEG in einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur schematisch dargestellt. Dabei zeigt Abbildung 3.1 (a) links



die Bandkanten von intrinsischem GaAs mit seiner Fermi-Energie  $E_F$  in der Mitte der Bandlücke sowie rechts die Bandkanten von AlGaAs mit im Vergleich größerer Bandlücke und einer durch Dotierung nach oben verschobenen Fermi-Energie. In Abbildung 3.1 (b) ist die Situation nach dem Zusammenbringen beider Materialien zu sehen. Es stellt sich dann im Gleichgewicht eine über dem ganzen Kristall konstante Fermi-Energie ein und die Bandstruktur verbiegt sich entsprechend. An der Grenzfläche zwischen den beiden Materialien entsteht dabei eine Diskontinuität, die im Leitungsband zu der Ausbildung des oben erwähnten Quantentopfes führt, dessen unterstes Subband unter der Fermi-Energie liegt.

Bei der Dotierung derartiger GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen wird im Allgemeinen darauf geachtet, die Dotieratome von der 2DEG-Ebene räumlich zu trennen, also den Bereich, der direkt am 2DEG angrenzt, undotiert zu lassen. Durch ein solches Vorgehen stellen die ionisierten Donator-Atome keine Streuzentren für die Elektronen im 2DEG dar, sodass dort sehr hohe Beweglichkeiten erreicht werden können. Eine Möglichkeit dazu ist die Volumendotierung einer entfernten Schicht aus AlGaAs, während eine andere Methode die  $\delta$ -Dotierung ist, bei der eine nur wenige Monolagen dicke Dotierschicht aus z.B. Silizium (Si) zwischen zwei Lagen aus GaAs oder AlGaAs eingebettet wird.

## 3.2 Verwendete Heterostrukturen

In Abbildung 3.2 sind die Schichtfolgen der für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Proben verwendeten GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen 71000, C021212A und C021227B dargestellt. Alle drei sind mit Silizium  $\delta$ -Dotiert und bilden ein relativ flaches 2DEG in nur etwas mehr als 30 nm Tiefe aus. Ihre wesentlichen Parameter bei tiefen Temperaturen wie die genaue Tiefe des 2DEG, die Elektronendichte  $n_e$  im 2DEG, die dortige Elektronenbeweglichkeit  $\mu_e$  und die elektronische Kohärenzlänge  $l_e$  sind in Tabelle 3.1 aufgeführt. Es ist zu beachten, dass die in den nächsten Kapiteln beschriebenen Quantenringe deutlich kleiner sind als die Kohärenzlänge des jeweiligen 2DEG, in dem sie realisiert wurden. Daher sind sie als Interferometer für Elektronen geeignet.

Hergestellt wurde das Material 71000 von Bichler und Abstreiter am Walter-Schottky-Institut der Technischen Universität München sowie von Wegscheider an der Universität Regensburg. Die Heterostruktur C021212A stammt von Reinwald und Wegscheider, Universität Regensburg, während das Material C021227B von Wegscheider alleine gewachsen wurde.

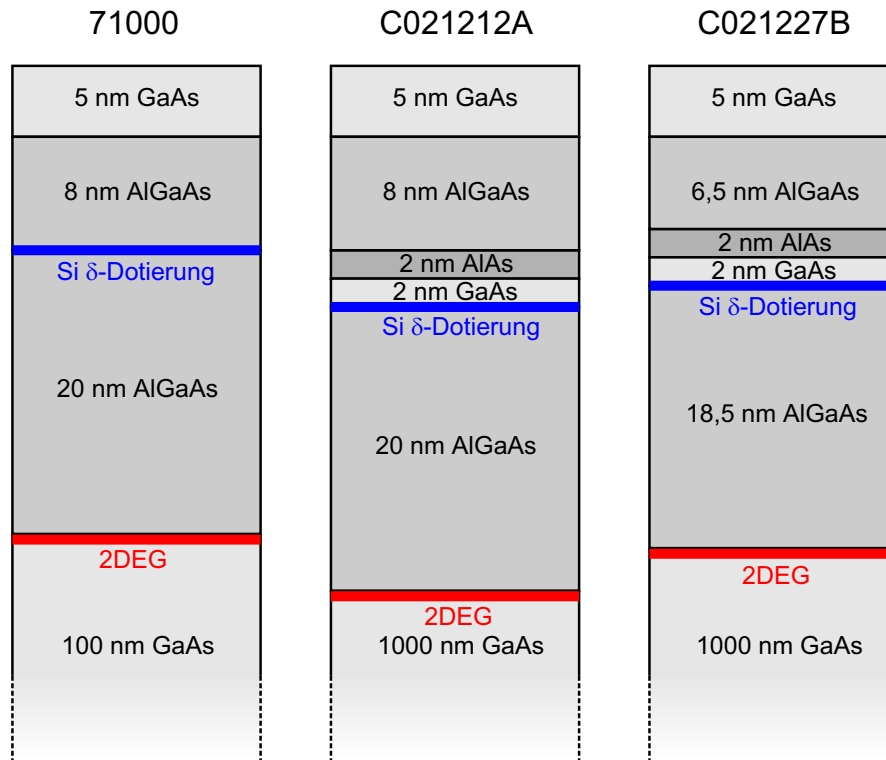


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Schichtfolgen in den verwendeten Heterostrukturen 71000, C021212A und C021227B.

	71000	C021212A	C021227B
Tiefe des 2DEG (nm)	33	37	34
$n_e$ ( $\text{m}^{-2}$ )	$4,3 \cdot 10^{15}$	$3,9 \cdot 10^{15}$	$3,85 \cdot 10^{15}$
$\mu_e$ ( $\text{m}^2/\text{Vs}$ )	42,1	52,7	64,3
$l_e$ ( $\mu\text{m}$ )	4,6	5,4	6,6

Tabelle 3.1: Parameter der verwendeten Heterostrukturen bei  $T = 4,2$  K.

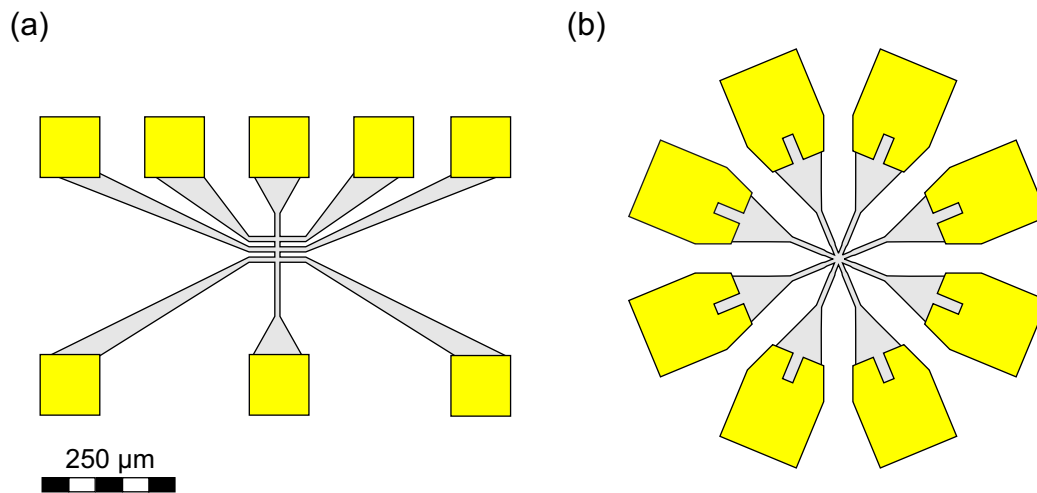


Abbildung 3.3: Draufsicht auf die beiden verwendeten Mesa-Formen (a) Hall-Bar und (b) Stern. Die einlegierten Gold-Kontakte sind gelb dargestellt.

### 3.3 Optische Lithografie

Bevor das 2DEG in einem etwa  $4\text{ mm} \times 4\text{ mm}$  großen Chip in einer Heterostruktur sinnvoll als Basis für eine Nanostruktur genutzt werden kann, muss es in kleinere, einfach zu bearbeitende Gebiete unterteilt werden, die außerdem über Möglichkeiten zur elektrischen Kontaktierung verfügen. Daher bietet es sich an, mittels optischer Lithografie [81] Strukturen aus schmalen Leiterbahnen an der Oberfläche zu erzeugen. Dazu wird die Oberfläche mit einer Schicht Fotolack überzogen, der über eine Schattenmaske in der Form der gewünschten Struktur belichtet wird. Anschließendes Entwickeln des Lackes belässt dann einen schützenden Film nur auf den zuvor abgeschatteten Bereichen, sodass der übrige Teil der Oberfläche selektiv mittels Nassätzen über hundert Nanometer tief abgetragen werden kann. Dadurch bleibt die Schicht, in der sich das 2DEG ausbilden kann, nur in den geschützten Bereichen erhalten, welche aufgrund ihres an Tafelberge erinnernden Querschnitts als Mesas bezeichnet werden.

Um das 2DEG an bestimmten Stellen elektrisch zu kontaktieren, können ebenfalls durch optische Lithografie Kontakte auf der Oberfläche angebracht werden. Dazu wird wieder eine Schicht Fotolack aufgebracht, der dann derart belichtet und entwickelt wird, dass er die Oberfläche bedeckt, außer an den Stellen, an denen sich die Kontakte befinden sollen. Dann wird die Probe in einer Aufdampfanlage mit einer einige Nanometer dicken

Lage aus Germanium und darauf Gold beschichtet. Anschließend wird der Lack und damit auch alles Material, das sich darauf befindet, entfernt, sodass auf der Oberfläche nur noch an den zuvor definierten Stellen aufgedampft Material verbleibt. Danach wird die Probe erhitzt, sodass die Mischung aus Germanium und Gold ausgehend von der Oberfläche in die Heterostruktur einlegiert wird. Dadurch wird eine leitfähige Verbindung bis in die Ebene des 2DEG hinein hergestellt und die Bildung einer Schottky-Barriere vermieden. Mit einer Kantenlänge von über  $100\text{ }\mu\text{m}$  sind die hier erzeugten Kontaktflächen groß genug, um dort mit einem Bonder Drähte aufzubringen, über die dann die Verbindung zu einem beliebigen Aufbau von Messgeräten hergestellt werden kann.

Die beiden Formen kontaktierter Mesa-Strukturen, die als Grundlage für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Nanostrukturen verwendet wurden, sind in Abbildung 3.3 dargestellt. Es handelt sich zum einen um einen Hall-Bar (Abbildung 3.3 (a)) und zum anderen um eine Sternform (Abbildung 3.3 (b)). Dabei sind die Leiterbahnen an keiner Stelle schmaler als  $10\text{ }\mu\text{m}$  (Hall-Bar) beziehungsweise  $8\text{ }\mu\text{m}$  (Stern) und somit bei beiden Strukturen breit genug, um durch die laterale Einschränkung der Elektronen keine zusätzlichen quantenmechanischen Effekte auftreten zu lassen.

## 3.4 Lithografie mit dem Rasterkraftmikroskop

Zur Erzeugung von Nanostrukturen, also Systemen, deren Details Abmessungen im Nanometern-Bereich haben, reicht die Auflösung der hier eingesetzten optischen Lithografie nicht mehr aus und es werden andere Verfahren verwendet. So wurden die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Quantenringe durch lokale anodische Oxidation mit einem Rasterkraftmikroskop (AFM) hergestellt.

Diese Methode der Oxidation einer Oberfläche mit der Spitze eines Rastertunnel- [82] oder Rasterkraftmikroskops [59] eignet sich zur Bearbeitung verschiedener Materialien [83–85] und wurde von Ishii und Matsumoto [60] erstmals für die Erzeugung einer Barriere im 2DEG einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur eingesetzt. Dabei wird ausgenutzt, dass in den verwendeten Heterostrukturen die energetische Tiefe des Quantentopfes, der das 2DEG enthält, vom Abstand zur Oberfläche abhängt, an der die Fermi-Energie aufgrund von Oberflächenzuständen in der Mitte der Bandlücke gehalten wird. So ist es möglich durch Abtragen von Material, also durch Verringerung des Abstandes zwischen der Oberfläche und der 2DEG-Ebene, den Quantentopf effektiv soweit anzuheben, dass sein unterstes Subband über

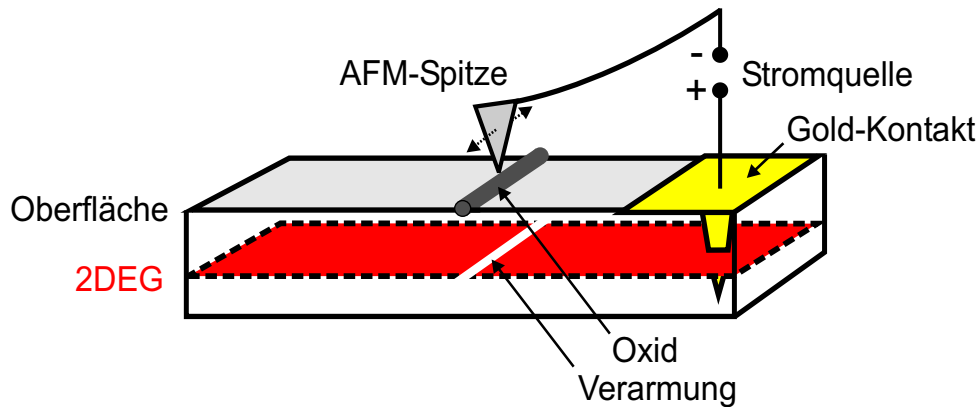


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung der lokalen anodischen Oxidation mit einem AFM. Mit der AFM-Spitze wird eine Oxidlinie an der Oberfläche erzeugt, die das darunter liegende 2DEG verarmt. Das 2DEG wird so in voneinander isolierte Bereiche geteilt.

die Fermi-Energie wandert. Dadurch wird das 2DEG an der entsprechenden Stelle entleert. Eine analoge Auswirkung hat auch eine Oxidation der Oberfläche, die sich in das Material hinein fortsetzt, wodurch die eigentliche Kristalloberfläche effektiv nach unten wandert. Eine solche Oxidation kann lokal eng begrenzt mit der Spitze eines AFM hervorgerufen werden. Dabei ist es für die hier angewendete Methode wichtig, dass die Oberfläche der Probe durch die Luftfeuchtigkeit mit einem dünnen Wasserfilm bedeckt ist, sodass AFM-Spitze, Oberfläche und Wasser eine elektrolytische Zelle bilden. Das Anlegen einer negativen Spannung an die Spitze relativ zur Oberfläche löst durch den dann fließenden Strom die Oxidation der Oberfläche direkt unter der Spitze aus. Die entsprechende Reaktion ist von der anodischen Oxidation größerer Flächen [86] bekannt und verläuft gemäß



Dabei stehen die  $\text{h}^+$  für im Material vorhandene Löcher aus beispielsweise photogenerierten Elektron-Loch-Paaren, die  $\text{OH}^-$  sind aus der Autoprotolyse des Wassers stammende Hydroxidionen,  $\text{Ga}_2\text{O}_3$  und  $\text{As}_2\text{O}_3$  sind die entstehenden Oxide,  $\text{H}_2\text{O}$  ist Wasser und die  $\text{H}^+$  sind Protonen. Das entstehende Oxid setzt sich dabei bis einige Nanometer tief unter die Oberfläche fort. Gleichzeitig quillt auch etwas davon nach oben heraus, da es aufgrund des zusätzlich eingebauten Sauerstoffs ein größeres Volumen als das ursprüngliche Material besitzt. Entsprechend sind derart oxidierte Bereiche auf AFM-Bildern deutlich zu erkennen. Durch Bewegen der AFM-Spitze

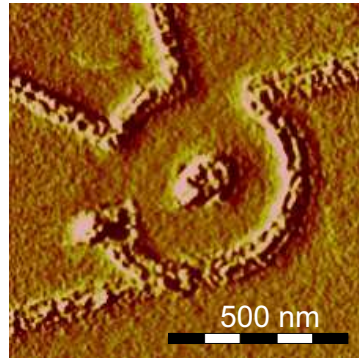
über die Oberfläche während der Oxidation ist es möglich, isolierende Linien in das 2DEG zu schreiben, wie es schematisch in Abbildung 3.4 dargestellt ist. Dieses Verfahren ermöglicht es, Bereiche des 2DEG voneinander zu trennen sowie elektronische Nanostrukturen zu schaffen.

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Quantenringe wurden mit einem AFM des Modells Nanoscope IIIa von Digital Instruments erzeugt und sind auf Abbildung 3.5 dargestellt. Zur Oxidation wurden Silizium-Spitzen verwendet und mit einer Geschwindigkeit von  $\sim 0,2 \mu\text{m/s}$  bewegt, wobei ein Gleichstrom von je nach Probe 800 nA oder 1  $\mu\text{A}$  mit einer externen Stromquelle vom Typ Keithley 2400 durch Oberfläche und Spitze getrieben wurde. Die relative Luftfeuchtigkeit wurde unter einer über das AFM gestülpten Haube konstant auf 70 % gehalten, was durch die Zuführung von zuvor in einem kleinen Wassertank angefeuchteten Stickstoffgas erreicht wurde. Die geschriebenen Oxidlinien erreichten Breiten von bis unter 100 nm bei Höhen von bis zu 10 nm.

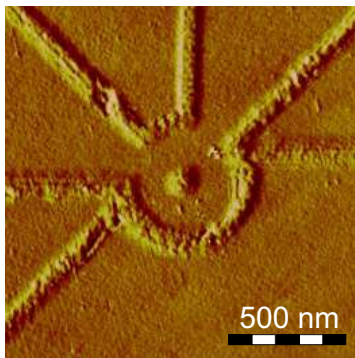
## 3.5 Kryostaten

Für die Untersuchung von Quanteneffekten ist es notwendig, dass die thermische Energie  $k_{\text{B}}T$  klein gegenüber den Energiedifferenzen im betrachteten System ist. Da die Subbandabstände im 2DEG und die Abstände der Energieniveaus der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Nanostrukturen nur wenige Millielektronvolt beträgt, musste die Temperatur während der hier beschriebenen Messungen auf einem Wert im Bereich von einigen Millikelvin gehalten werden. Daher wurden diese Experiment jeweils in einem von zwei Kryostaten durchgeführt. Beide Systeme stammen von der Firma Oxford Instruments, wobei es sich zum einen um einen Kelvinox 300 und zum anderen um einen KelvinoxTLM handelt. Beide arbeiten nach dem  $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungsprinzip [87] und erreichen eine minimale Basistemperatur in der Größenordnung von 20 mK. Außerdem sind beide durch supraleitende Magnetspulen ergänzt, die im Betrieb mit  $^4\text{He}$  gekühlt werden müssen. Die damit erzeugten Magnetfelder standen bei den hier beschriebenen Messungen immer senkrecht zur Ebene der untersuchten Proben. Die maximal erreichbare magnetische Flussdichte am Ort der Probe beträgt bei einer Magnettemperatur von 4,2 K 13 T im erst- und 18 T im zuletzt genannten System. Bei Bedarf können die Spulen durch Pumpen am sie umgebenden  $^4\text{He}$  aber auch auf unter 2,2 K gekühlt werden, wodurch sich die maximal mögliche Flussdichte um 2 T erhöht. Damit lassen sich in den Systemen also Felder bis zu 15 T beziehungsweise 20 T erreichen.

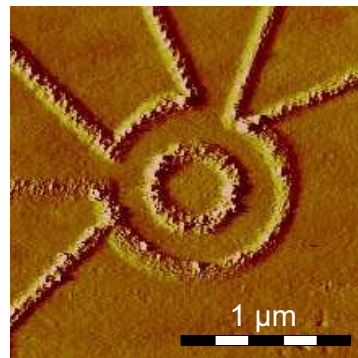
71000-HB9



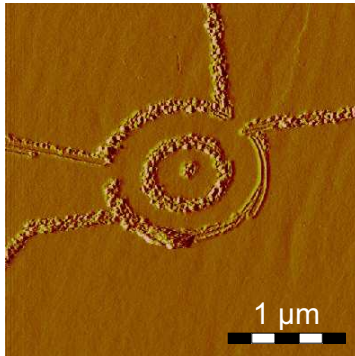
P03-S5



P03-S2



P04A-S1



P04B-S2

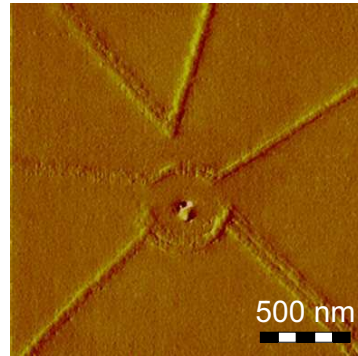


Abbildung 3.5: AFM-Bilder aller im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Quantenringe, die jeweils in Kapitel 4 (71000-HB9, P03-S5, P03-S2), Kapitel 5 (P04A-S1) und Kapitel 6 (P04B-S2) beschrieben werden. Es sind deutlich die isolierenden Oxidlinien zu sehen, zwischen denen die leitfähigen Bereiche der Quantenstrukturen liegen.

## 3.6 Transportmessungen

Bei den in den folgenden Kapiteln beschriebenen Experimenten wurde der elektronische Transport durch verschiedene Nanostrukturen untersucht. An den Proben wurden dazu über zwei als „Source“ und „Drain“ bezeichnete Zuleitungen Zwei-Punkt-Messungen der differentiellen Leitfähigkeit  $G = dI/dV_{SD}$  durchgeführt, indem eine oszillierende Spannung  $V_{SD}$  angelegt und der mit entsprechender Frequenz fließende Wechselstrom  $I_{AC}$  mit Hilfe eines Lock-In-Verstärkers gemessen wurde. Der dazu verwendete Messaufbau ist auf Abbildung 3.6 schematisch dargestellt und besteht im Kern aus einem Lock-In-Verstärker von Typ EG&G 7260, der einen eingebauten Oszillator zur Ausgabe einer Wechselspannung besitzt. Zu dieser kann über einen Addierer noch eine Gleichspannung hinzugefügt werden, die von einem Digital-Analog-Konverter IOtech DAC488HR geliefert wird. Um die von den Geräten in ihrem optimalen Arbeitsbereich erzeugte Spannung in den benötigten Bereich von Mikro- bzw. Millivolt zu bringen, wird sie über einen 1:1000-Teiler geführt, um die an der Probe angelegte Spannung  $V_{SD}$  zu erhalten. Mit der Probe in Reihe geschaltet ist ein Stromverstärker Ithaco 1211, der eine dem Gesamtstrom  $I$  proportionale Spannung erzeugt, die dann vom Lock-In-Verstärker gemessen wird. Ein über eine GPIB-Schnittstelle mit den Geräten verbundener Computer, der allgemein die Ansteuerung des Messaufbaus übernimmt, kann dann aus der angelegten Wechselspannung und der entsprechenden Frequenzkomponente des gemessenen Stromsignals den Wert von  $G$  bestimmen. Zusätzlich wird über ein Multimeter des Typs Keithley 2000, das über einen 1-Hz-Filter parallel zum Lock-In am Ausgang des Stromverstärkers angeschlossen ist, auch die Gleichstromkomponente  $I_{DC}$  des Signals bestimmt. Gates an den untersuchten Proben werden über weitere der insgesamt vier Anschlüsse des IOtech DAC488HR und zwischengeschaltete 1-Hz-Filter angesteuert.

Bei den in den folgen Kapiteln beschriebenen Experimenten wurde der Oszillator im EG&G 7260 mit niedrigen Frequenzen im Bereich von 13 Hz bis 39 Hz betrieben, der Effektivwert der Wechselspannung betrug  $10\ \mu\text{V}$  und der Verstärkungsfaktor am Stromverstärker war auf  $10^7\ \text{V/A}$  eingestellt. Die Gleichspannungskomponente in  $V_{SD}$  betrug maximal  $\pm 2\ \mu\text{V}$ , wobei die meisten Messungen ohne eine solche Vorspannung nur unter Anlegen des Oszillatorsignals durchgeführt wurden. Die an vorhandene Gates angelegten Spannungen lagen im Bereich von bis zu einigen hundert Millivolt.



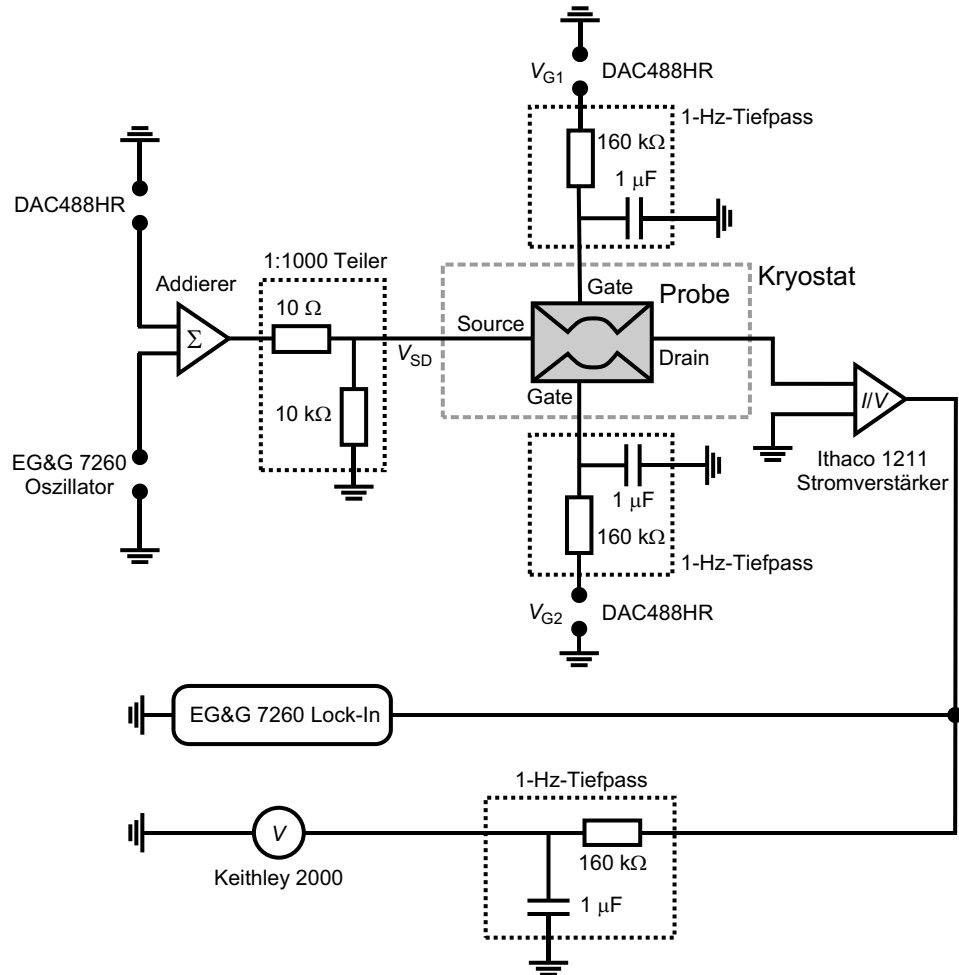


Abbildung 3.6: Schema des verwendeten Messaufbaus mit symbolischer Darstellung einer Probe mit zwei Gates. Die genaue Beschriftung der untersuchten Strukturen wird an den entsprechenden Stellen in den folgenden Kapiteln gezeigt.

## **3.7 Zusammenfassung**

Dieses Kapitel widmete sich den Technologien, die bei der Herstellung der Proben und den durchgeführten Experimenten zum Einsatz kamen.

Als erstes wurde die Bildung eines 2DEG in einer entsprechend aufgebauten GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen beschrieben. Danach wurden die Heterostrukturen vorgestellt, die für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Proben verwendet wurden. Dabei wurden auch die jeweiligen 2DEG-Parameter aufgeführt. Im nächsten Abschnitt wurde auf das Verfahren eingegangen, mit dem über optische Lithografie Mesa-Strukturen auf den Proben erzeugt wurden. Auch wurden die beiden als Mesas umgesetzten Formen gezeigt. Dann wurde die Lithographie-Methode der lokalen anodischen Oxidation mit einem AFM erklärt. Diese wurde eingesetzt, um im 2DEG der Proben die gezeigten Quantenringe zu definieren. Anschließend wurden die für die Experimente verwendeten Kryostaten und die mit ihnen kombinierten Magnetspulen beschrieben. Den Abschluss bildete die Erläuterung des für die Transportmessungen eingesetzten Messaufbaus.

# Kapitel 4

## Messungen an einfachen Quantenringen

Dieses Kapitel stellt die im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Messungen an Quantenringen mit einfacher Geometrie vor. Dies sind Nanostrukturen, die ringförmige Leiterbahnen jeweils gleichmäßiger Breite bilden und zwei Zuleitungen besitzen, aber nicht die geometrischen Besonderheiten der in den Kapiteln 5 und 6 beschriebenen Proben aufweisen.

Zuerst wird auf den Quantenring 7100012-HB9 eingegangen, der ursprünglich im Rahmen anderer Arbeiten [88, 89] hergestellt worden war, aber auch für den experimentellen Teil dieser Arbeit zur Verfügung stand. Bei dieser Struktur ist in der magnetfeldabhängigen Leitfähigkeit bei wenigen Elektronen auf dem Ring eine reduzierte Aharonov-Bohm-Periode zu beobachten. Des Weiteren wurde das Transportspektrum des Rings über einen großen Bereich einer Gatespannung und des externen Magnetfeldes aufgenommen. Außerdem zeigt der normale Aharonov-Bohm-Effekt dieser Struktur eine modulierte Amplitude. Eine solche Modulation tritt ebenfalls bei den anschließend beschriebenen, im Rahmen dieser Arbeit hergestellten Ringen P03-S5 und P03-S2 auf.

### 4.1 Die Struktur 7100012-HB9

Bei der Probe 7100012 handelt es sich um einen Chip aus Material der GaAs/AlGaAs-Heterostruktur 71000, die in Abschnitt 3.2 beschrieben ist. Durch optische Lithografie wurden wie in Abschnitt 3.3 erklärt auf ihrer Oberfläche mehrere mit Kontakten versehene Mesas in Form der dort gezeigten Hall-Geometrie erzeugt. Auf einem dieser Hall-Bars wurde mit der in Abschnitt 3.4 erläuterten Methode der lokalen anodischen Oxidation der Quantenring 7100012-HB9 erzeugt. Entworfen und hergestellt wurde diese Struktur von Keyser und Borck in Hannover, die anschließend sehr erfolg-

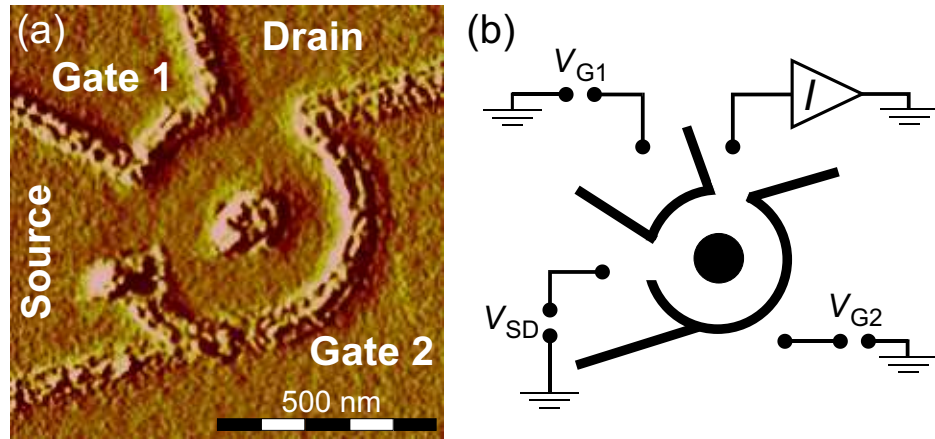


Abbildung 4.1: (a) AFM-Bild der Struktur 7100012-HB9. (b) Schema der elektrischen Anschlüsse für die Messungen.

reich experimentelle Untersuchungen mit interessanten Ergebnissen daran durchführen konnten. [32, 88–92]

Eine AFM-Aufnahme der Struktur ist in Abbildung 4.1 (a) zu sehen. Die dort gut erkennbaren Oxidlinien haben jeweils eine Breite von etwa 100 nm. Der äußere Durchmesser des von ihnen definierten Quantenrings, also der Abstand zwischen den inneren Kanten des Oxids an gegenüberliegenden Seiten, beträgt 450 nm. Die inneren Begrenzungen, der Oxidpunkt in der Mitte, hat einen Durchmesser von 190 nm. Die Engstellen, die den Ring an die beiden Zuleitungen „Source“ (S) und „Drain“ (D) koppeln, sind jeweils 150 nm breit. Die beiden Bereiche, die vom Rest der Struktur isoliert sind, werden als Gates verwendet und wie auf der Abbildung gekennzeichnet als „Gate 1“ (G1) und „Gate 2“ (G2) bezeichnet. Mit ihrer Hilfe können das elektrochemische Potenzial des Rings sowie die Kopplung über die Engstellen an die Zuleitungen variiert werden. Dabei ist zu beachten, dass die Struktur asymmetrisch aufgebaut ist. So reicht Gate 2 bis an die Engstelle heran, die den Ring mit Drain verbindet, während es einen Abstand zu der anderen Engstelle aufweist. Außerdem grenzt Gate 2 entlang einer wesentlich längeren Strecke an den Ring als Gate 1.

Für die Experimente im Rahmen dieser Arbeit wurde die Struktur in den in Abschnitt 3.5 beschriebenen Kryostaten vom Typ Kelvinox 300 mit 13/15-T-Magnetspule eingebaut und auf einer Temperatur von 30 mK gehalten. Außerdem wurde die Probe wie in Abbildung 4.1 (b) skizziert mit dem in Abschnitt 3.6 gezeigte Messaufbau verbunden.

## 4.2 Aharonov-Bohm-Effekt

Eine Messung der differentiellen Leitfähigkeit  $G$  durch den Ring in Abhängigkeit des externen Magnetfeldes  $B$  und der Gatespannung  $V_{G2}$  bei fester Gatespannung  $V_{G1} = 95 \text{ mV}$  über den Bereich mit  $0 \text{ mT} \leq B \leq 500 \text{ mT}$  und  $60 \text{ mV} \leq V_{G2} \leq 100 \text{ mV}$  wird in Abbildung 4.2 (a) gezeigt.

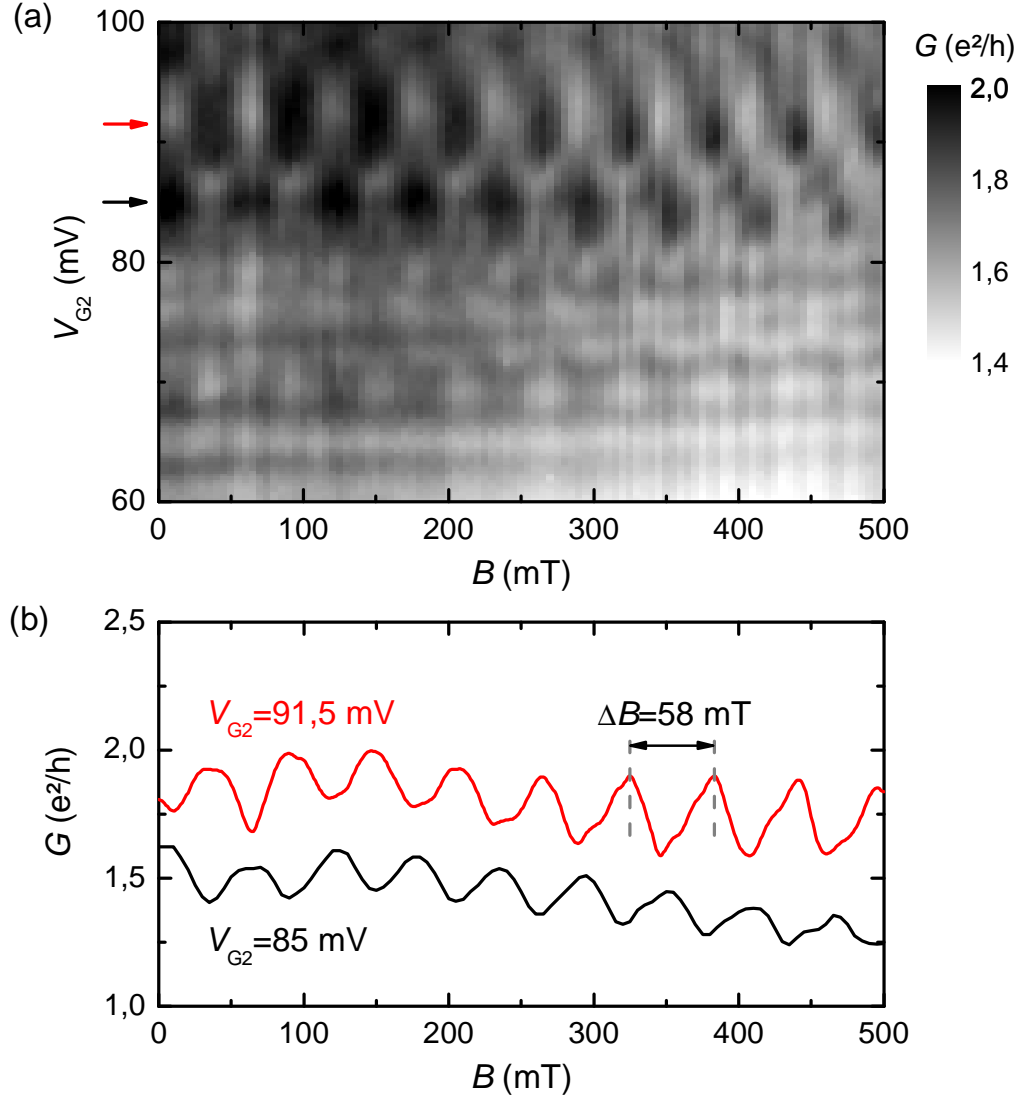


Abbildung 4.2: (a) Leitfähigkeit des Rings bei  $V_{G1} = 95 \text{ mV}$  in Abhängigkeit von  $V_{G2}$  und  $B$ . (b) Schnitte bei  $V_{G2} = 91,5 \text{ mV}$  (rot) und  $V_{G2} = 85 \text{ mV}$  (schwarz, um  $0,4 e^2/h$  nach unten verschoben).

Im Regime oberhalb von  $V_{G2} = 70$  mV, bei dem beide Zuleitungen durch die positiven Gatespannungen eine hohe Transmission besitzen, treten die in Abschnitt 2.4 erklärten Aharonov-Bohm-Oszillationen über dem Magnetfeld auf. Ihre Ausprägung nimmt für höhere Werte von  $V_{G2}$  zu und ihre Wellenhöhe erreicht etwa 17 % Anteil am Gesamtwert der Leitfähigkeit. Zwei Schnitte durch die Darstellung an den mit Pfeilen markierten Stelle  $V_{G1} = 91,5$  mV und  $V_{G1} = 85$  mV werden in Abbildung 4.2 (b) gezeigt. An diesen Kurven ist gut die gleichmäßige Oszillationsperiode  $\Delta B = 58$  mT zu erkennen. Aus dieser ergibt sich gemäß Gleichung 2.30 für die Elektronenbahn im Ring ein Radius von  $r_0 = 150$  nm, der einem Weg in der Mitte des leitfähigen Bereichs der geschriebenen Geometrie entspricht. Betrachtet man in Abbildung 4.2 (a) die Abhängigkeit des Aharonov-Bohm-Effektes von der Gatespannung, so ist zu erkennen, dass die Phase der Oszillationen bei bestimmten Werten von  $V_{G2}$  um  $\pi$  springt. Dies ist auch an den Schnitten in Abbildung 4.2 (b) zu sehen, zwischen denen ein solcher Phasensprung liegt, sodass die Maxima der roten Kurve an den Stellen liegen, an denen die schwarze Minima besitzt und umgekehrt. Diese Beobachtung ist, wie in Abschnitt 2.4 beschrieben, auf die asymmetrische Beeinflussung der Arme des Rings durch die Gatespannung zurückzuführen. Gate 2 beeinflusst aufgrund seiner Lage das elektrostatische Potenzial im unteren Arm des Rings stärker als im oberen und verändert so die Phasendifferenz zwischen den Teilen der elektronischen Wellenfunktion in diesen beiden Bereichen.

### 4.3 Reduzierte Aharonov-Bohm-Periode

Abbildung 4.3 (a) zeigt die Leitfähigkeit  $G$  für deutlich negative Gatespannungen  $V_{G1} = -80$  mV und  $-320$  mV  $\leq V_{G2} \leq -220$  mV. Da in diesem Regime die Engstellen so eingestellt sind, dass nur Tunnelkopplung an die Zuleitungen besteht, ergibt sich das Additionsspektrum der Struktur. Außerdem wurde in der gezeigten Messung das Magnetfeld  $B$  im Bereich von 0 T bis 6,3 T variiert. Oberhalb von  $V_{G2} = -260$  mV bildet sich zwar durch die dann einsetzende Öffnung der Zuleitung zu Drain ein komplizierteres Muster aus, aber darunter sind deutliche Coulomb-Blockade-Linien erkennbar, die weitgehend parallel zur  $B$ -Achse verlaufen. Obwohl nominell ohne ein Vorspannung über Source und Drain gemessen wurden, sind diese Linien leicht aufgespalten, was vermutlich auf das Vorhandensein einer Thermospannung zurückzuführen ist. Nicht-verschwindende Leitfähigkeit zwischen den ausgeprägten Linien kann dem Kondo-Effekt [93] zugeschrieben wer-

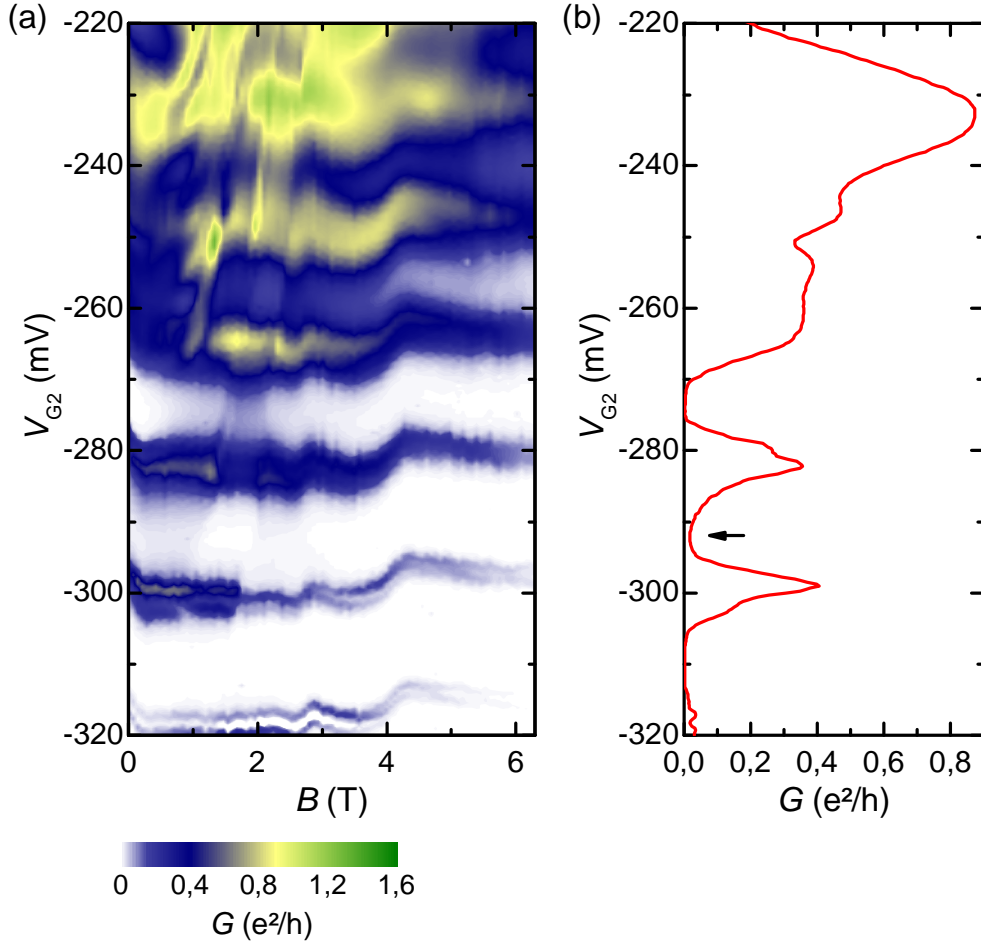


Abbildung 4.3: (a) Das Additionsspektrum des Rings bei  $V_{G1} = -80$  mV in Abhängigkeit von  $V_{G2}$  und  $B$ . (b) Schnitt bei  $B = 0$  mT. Der Pfeil markiert den Kondo-Effekt in einem Coulomb-Blockade-Bereich.

den [90], der im vorliegenden Fall abwechselnd in den Blockade-Bereichen auftritt. In Abbildung 4.3 (b) ist  $G$  für  $B = 0$  mT über dem betrachteten Bereich von  $V_{G2}$  dargestellt. An der markierten Stelle ist die Kondo-Leitfähigkeit gut zu erkennen, während der Transport durch den Ring in den benachbarten Tälern komplett verschwindet. Bei höherem Magnetfeld kommt es aber zu plötzlichen Wechseln zwischen Auftreten und Fehlen des Kondo-Effekts. Dies kann damit erklärt werden, dass bei hohen Magnetfeldern der Transport durch das dann vorhandene niedrigste Landau-Level [94] am äußeren Rand des Rings verläuft und der Kondo-Effekt nur auftritt, wenn sich dort ein ungepaarter Spin, also eine ungerade Anzahl von

Elektronen befindet. Ein Anstieg von  $B$  führt aber zu Umverteilungen von Elektronen aus höheren in das niedrigste Landau-Level [95] und damit dort jedes Mal zu einem Wechsel zwischen gerader und ungerade Anzahl, sodass der Kondo-Effekt entsprechend alterniert.

Ein Ausschnitt aus dem Additionsspektrum mit  $-262 \text{ mV} \leq V_{G2} \leq -300 \text{ mV}$  und  $0 \text{ mT} \leq B \leq 150 \text{ mT}$ , der sich über drei Coulomb-Peaks erstreckt, ist in Abbildung 4.4 (a) zu sehen, während Abbildung 4.4 (b) einen Querschnitt bei  $B = 75 \text{ mT}$  zeigt. Abbildung 4.4 (c) stellt den Bereich aus (a) nach Abzug eines durch Intervallmittelung erhaltenen Hintergrundes dar. Dabei sind deutlich kleine Oszillationen im Signal in Abhängigkeit des Magnetfeldes zu erkennen. Sie besitzen nur eine Wellenhöhe von  $3,5 \cdot 10^{-2} e^2/h$  und weisen einige Unregelmäßigkeiten auf. Durch Abzählen der Maxima und Minima in Querschnitten durch die Darstellung an den Stellen ihre deutlichsten Ausprägung kann für sie aber trotzdem eine ungefähre Periode bestimmt werden. Mit einer Schwankungsbreite von  $\pm 2 \text{ mT}$  liegt diese über den gesamten betrachteten Bereich der Gatespannung bei  $\sim 20 \text{ mT}$ . In Abbildung 4.4 (d) werden die entsprechenden Schnitte gezeigt, die parallel zur  $B$ -Achse durch die Darstellung aus Abbildung 4.4 (c) verlaufen. In der Reihenfolge von unten nach oben liegen sie bei den Gatespannungen  $V_{G2} = -299 \text{ mV}$  (schwarz),  $-296 \text{ mV}$  (rot),  $-281 \text{ mV}$  (grün),  $-278,5 \text{ mV}$  (blau),  $-267 \text{ mV}$  (türkis) und  $-263 \text{ mV}$  (purpur). Die Kurven entsprechen dabei jeweils den mit denselben Farben markierten Stellen in den Abbildungen 4.4 (b) und 4.4 (c) und sind zur besseren Übersicht vertikal gegeneinander verschoben. In Abbildung 4.4 (c) ist zu erkennen, dass die kleinen Oszillationen im Zentrum des unteren und des mittleren Coulomb-Peaks jeweils einem Phasensprung von  $\pi$  unterliegen, sowie dass sich die Extrema im Bereich zwischen den Peaks kontinuierlich verschieben. Diese Verschiebung entspricht einer Phasenänderung um annähernd  $2\pi$  vom unteren Peak zu dem in der Mitte. Vom mittleren zum oberen Peak ändert sich die Phase der Oszillationen allerdings nur um  $\pi$ , aber dieser Bereich unterscheidet sich auch qualitativ vom vorhergehenden Tal, da hier der Kondo-Effekt nicht auftritt. In Abbildung 4.4 (d) kann dieses Verhalten gut nachvollzogen werden, wenn man die verschiedenen Kurven an der Position, die durch die gestrichelte Linie markiert ist, miteinander vergleicht. An dieser Stelle besitzt die schwarze Kurve ein Maximum, während die rote Linie, die von der anderen Seite des unteren Peaks stammt, ein Minimum aufweist. Bis zur grünen Linie verschieben sich die Extrema fast um eine Periodenlänge, sodass an der betrachteten Position fast genau wieder ein Minimum liegt, während die blaue Linie ist relativ dazu durch den Phasensprung um  $\pi$  am mittleren Peak um eine halbe Wellenlänge



### 4.3 Reduzierte Aharonov-Bohm-Periode

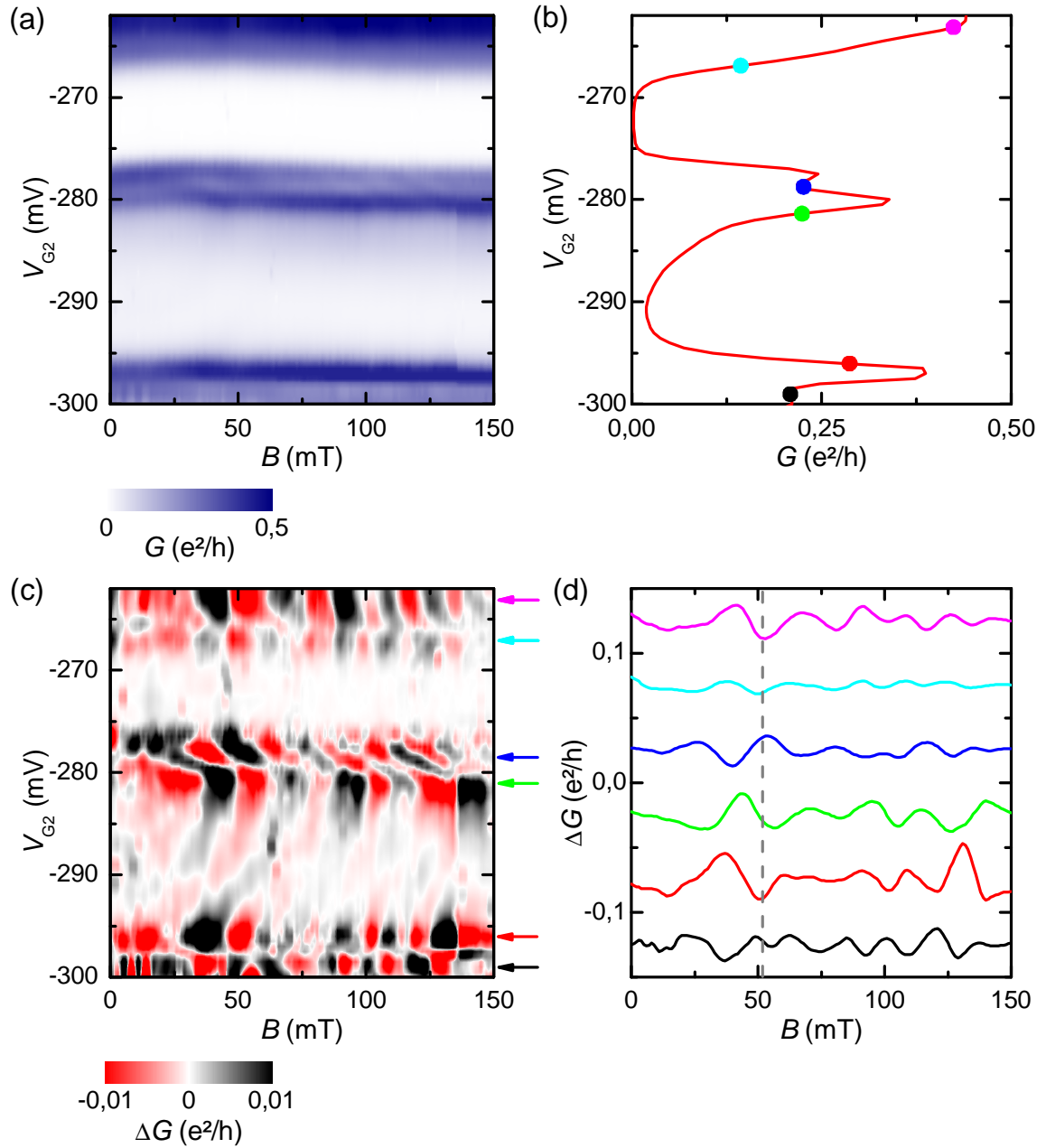


Abbildung 4.4: (a) Ausschnitt aus dem Additionsspektrum. (b) Schnitt bei  $B = 75$  mT. (c) Der Bereich aus (a) nach Abzug eines Untergrundes. (d) Schnitte an den in (b) und (c) markierten Stellen.

versetzt ist. Dann verschieben sich die Extrema wieder allmählich bis zur türkis gefärbten Kurve an der Flanke des nächsten Peaks, diesmal aber auch nur eine halbe Wellenlänge. Der letzte Peak, der die Grenze des deutlichen Coulomb-Blockade-Regimes bildet, zeigt weniger einen ausgeprägten Phasensprung in seiner Mitte, als eine kleine Unregelmäßigkeit, sodass das der letzte Schnitt an seiner oberen Seite keine deutliche Verschiebung der Extrema gegenüber den Oszillationen an der unteren Flanke zeigt.

Das Auftreten dieser Oszillationen über dem Magnetfeld, die nicht die zuvor bestimmte Aharonov-Bohm-Periode von 58 mT, sondern den deutlich reduzierten Wert aufweisen, wurden für die vorliegende Probe auch schon von Keyser *et al.* [90] beschrieben und dort gemäß einer theoretischen Rechnung von Niemelä *et al.* [96] gedeutet. Das verwendete Modell sagt für eine geringe Anzahl  $N$  wechselwirkender Elektronen auf einem Ring voraus, dass Oszillationen mit der  $1/N$ -fachen Periode des normalen Aharonov-Bohm-Effektes zu erwarten seien. Der von Keyser *et al.* beobachtete Wert von  $\sim 13$  mT passt dabei als etwa ein Fünftel der normalen Aharonov-Bohm-Periode recht gut zu der vermuteten Anzahl von  $N = 5$  Elektronen auf dem Ring an der entsprechenden Stelle des Additionsspektrums. Allerdings konnten die reduzierten Oszillationen nur in diesem einen Coulomb-Blockade-Tal für eben dieses eine  $N$  beobachtet werden, sodass nicht überprüft werden konnte, ob sich die reduzierte Periode wie erwartet mit dem Wert von  $N$  ändert. In den in dieser Arbeit vorgestellten Messungen ist es aber möglich, den reduzierten Aharonov-Bohm-Effekt über zwei aufeinander folgende Coulomb-Blockade-Täler hinweg zu verfolgen. Dabei wird festgestellt, dass die hier beobachtete Periode von etwa einem Drittel des normalen  $\Delta B$  in beiden Bereichen denselben Wert besitzt, also für zwei um 1 verschiedene Werte von  $N$  konstant bleibt. Nach dem Modell wäre hier, wenn im unteren der beiden Blockade-Bereiche  $N = 3$  gelten sollte, für das nächste Tal eine  $N = 4$  entsprechende Periode von 15 mT zu erwarten. Allerdings geht die Theorie von idealisierten Annahmen über die Form des Grundzustandes im Ring aus, die für eine höhere Anzahl von Elektronen immer komplizierter wird. Die Abweichung zum experimentellen Ergebnis könnte also leicht im realen Verlauf der Energie-Niveaus im Ring begründet sein.

Die Änderung der Phase der kleinen Oszillationen mit der Gatespannung verhält sich analog zu der Messungen des normalen Aharonov-Bohm-Effekts an Systemen aus einem in ein Quanteninterferometer eingebetteten Quantenpunkt. So beschreiben Schuster *et al.* [50] für ein solches System eine Verschiebung der Phase um  $\pi$  an Coulomb-Peaks sowie einen Phasensprung um  $\pi$  im dazwischenliegenden Blockade-Bereich ohne Kondo-Effekt.

Ji *et al.* [52] zeigen für ein ähnliches System, bei dem aber ein Kondo-Effekt auftritt, eine Phasenverschiebung von fast  $2\pi$  über eine Kondo-Resonanz hinweg.

## 4.4 Additionsspektrum

Abbildung 4.5 zeigt das Additionsspektrum des Rings bei  $V_{G1} = -40$  mV für  $-380 \text{ mV} \leq V_{G2} \leq -130 \text{ mV}$  und  $0 \text{ T} \leq B \leq 3,7 \text{ T}$ . Dabei wurde die vorhandene Thermospannung durch eine Vorspannung über den Zuleitungen von  $V_{SD} = 0,4 \text{ mV}$  kompensiert, sodass Coulomb-Peaks scharf zu sehen sind und nicht aufspalten. Für Werte von  $V_{G2}$ , die unterhalb des gezeigten Bereichs liegen, ist der Ring komplett geschlossen, sodass kein Transport beobachtet werden kann. Insgesamt ähnelt das Spektrum sehr dem eines scheibenförmigen Quantenpunktes [97, 98], vermutlich weil sowohl hier als auch dort der Transport im Regime starker Tunnel-Kopplung an die Zuleitungen bei hohen Magnetfeldern durch das am äußeren Rand verlaufende, niedrigste Landau-Level erfolgt.

Die erste Coulomb-Blockade-Linie liegt bei  $V_{G2} \sim -360 \text{ mV}$ . Darüber folgt bis  $-290 \text{ mV}$  ein Regime deutlicher Coulomb-Blockade, mit zum Teil erkennbarer Kondo-Leitfähigkeit zwischen den Peaks, entsprechend der in Abschnitt 4.3 beschriebenen Situation. Danach beginnt ein vor allem für kleinere Magnetfelder chaotischer Bereich. Ab  $-110 \text{ mV}$  sind aber auf einem mit dem Magnetfeld bis  $B \sim 1,5 \text{ T}$  zunehmenden und dann weitgehend konstant  $\sim 1,75 e^2/h$  betragenden Hintergrund wieder Coulomb-Blockade-Linien zu sehen. Diese rücken mit positiver werdender Gatespannung immer näher zusammen, da die Ausdehnung des effektiv leitfähige Bereich des Rings mit  $V_{G2}$  zunimmt. Des Weiteren verlaufen in der Darstellung von links unten nach rechts oben deutlich sichtbar die Linien, die die Umverteilung von Elektronen aus höheren in das unterste Landau-Level markieren.

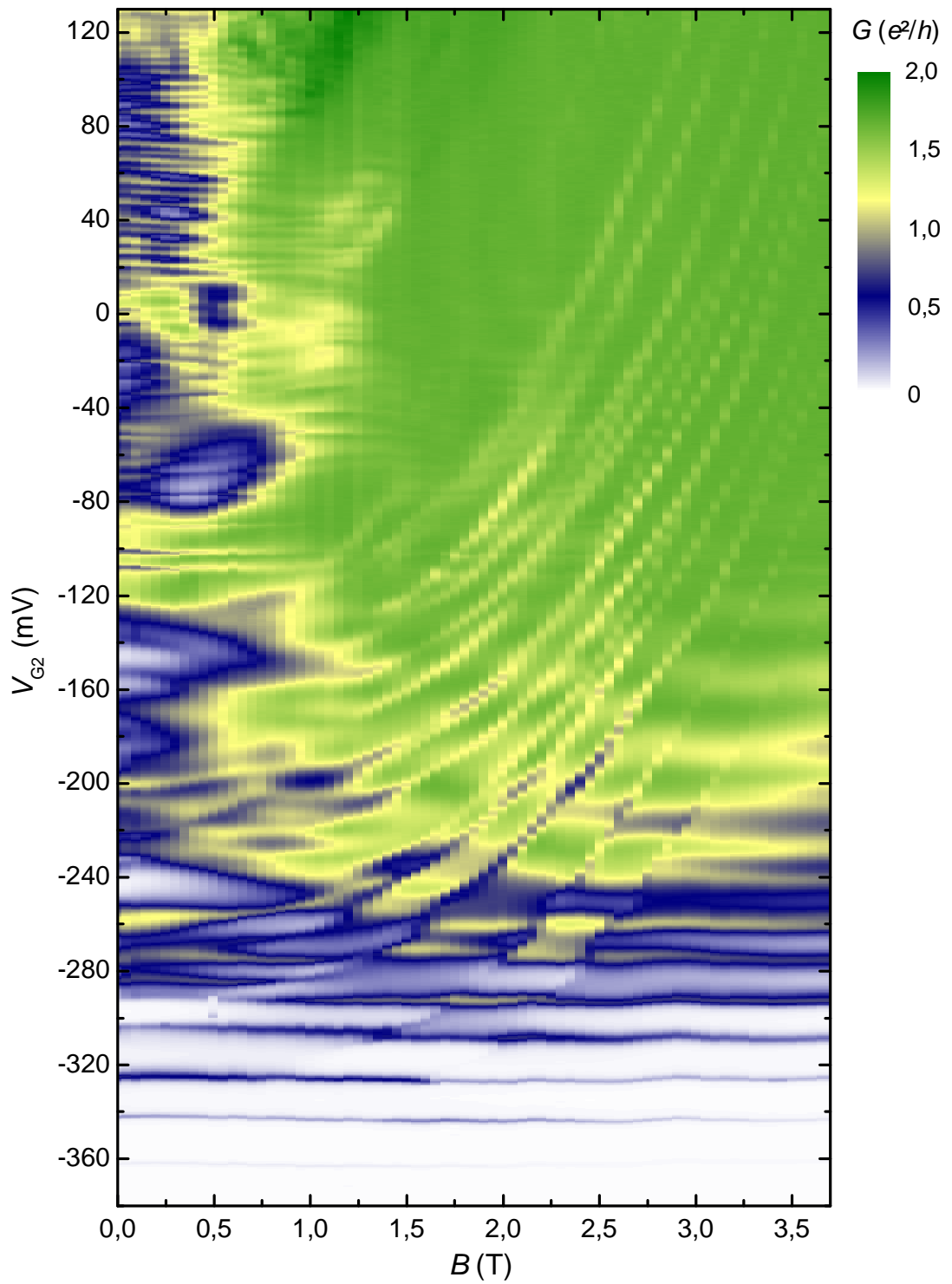


Abbildung 4.5: Das Additionsspektrum des Rings in Abhängigkeit des Magnetfeldes, gemessen über einen großen Bereich.

## 4.5 Die Strukturen P03-S5 und P03-S2

Ein Chip, der im Rahmen dieser Arbeit hergestellt wurden, ist die Probe P03. Er besteht aus Material der GaAs/AlGaAs-Heterostruktur C021212A, deren Aufbau in Abschnitt 3.2 gezeigt ist. Es wurden auch hier durch optische Lithografie, mehrere mit Kontakten versehene Mesas auf der Oberfläche erzeugt, die hier aber die in Abschnitt 3.3 vorgestellte Stern-Form besitzen. Auf zwei dieser Sterne wurde dann mit lokaler anodischer Oxidation jeweils ein Quantenring geschrieben. Diese beiden Strukturen, P03-S5

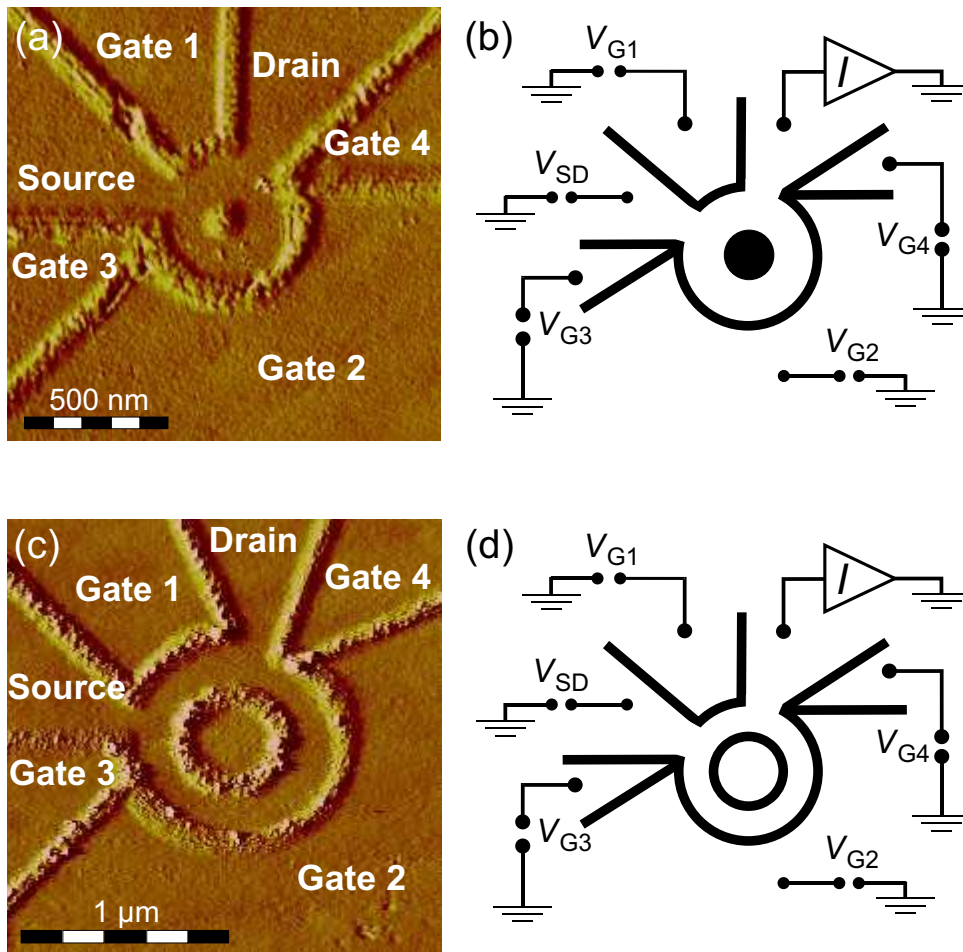


Abbildung 4.6: AFM-Aufnahmen (a) des kleineren Rings P03-S5 und (c) des größeren Rings P03-S2. Auf (b) und (d) ist jeweils das Schema der Beschaltung in den Messungen dargestellt.

und P03-S2, sind auf den Abbildung 4.6 (a) beziehungsweise 4.6 (c) zu sehen. Sie besitzen beide eine ähnliche Geometrie wie der in Abschnitt 4.1 gezeigte Ring 7100012-HB9, allerdings besitzen sie jeweils vier Gates statt nur zwei. Die Verbindungen zu den Zuleitungen „Source“ und „Drain“ (S und D) sowie die Gates G1 und G2 sind bei beiden Strukturen wieder asymmetrisch angeordnet, sodass nur G1 direkt an beide Engstellen heranreicht, dabei aber eine kürzere Grenze mit dem Ring hat als G2. Die hier jeweils noch zusätzlich vorhandenen weiteren Gates G3 und G4 liegen an beiden Seiten von G2 und sind speziell für die Kontrolle der Kopplung an die Zuleitungen bestimmt.

Die Breite der Oxidlinien beider Ringe auf P03 beträgt jeweils etwa 130 nm. P03-S5 hat einen äußeren Durchmesser von 400 nm und besitzt in der Mitte einen Oxidpunkt mit einer Breite von 150 nm. Die an Source und Drain koppelnden Engstellen sind jeweils 120 nm breit. P03-S2 besitzt dagegen einen äußeren Durchmesser von 900 nm. Die innere Grenze des Rings wird wegen der größeren Abmessungen nicht von einem Oxidpunkt, sondern von einem an seinem äußeren Rand 600 nm durchmessenden Kreis gebildet. Die Engstelle, die die Verbindung des Quantenrings zur Zuleitung Source herstellt, ist 100 nm breit, während die auf der anderen Seite eine Breite von 130 nm besitzt.

An der Probe P03 wurden Messungen in den in Abschnitt 3.5 beschriebenen Kryostaten des Typs KelvinoxTLM bei einer Temperatur von 40 mK durchgeführt. Es wurde dafür wieder der in Abschnitt 3.6 gezeigte Messaufbau verwendet, der mit dem jeweils untersuchten Ring gemäß dem entsprechenden Schema in Abbildung 4.6 (b) beziehungsweise 4.6 (d) verbunden war. Die Spannungen  $V_{G3}$  und  $V_{G4}$  wurden dabei häufig auf einen gemeinsamen Wert gesetzt.

## 4.6 Modulierte Aharonov-Bohm-Amplitude

Bei beiden Ringen auf der Probe P03 lag eine relativ hohe Leitfähigkeit von einigen  $e^2/h$  vor, wenn keine Spannungen an den Gates angelegt wurden. Durch Verwendung von negativen Gatespannungen konnte aber in beiden Fällen ein Aharonov-Bohm-Regime beobachtet werden. Abbildung 4.7 (a) zeigt die Leitfähigkeit des Rings P03-S5 für eine Gate-Konfiguration mit  $V_{G1} = -170$  mV,  $V_{G2} = -0$  mV und  $V_{G3} = V_{G4} = -100$  mV in Abhängigkeit des Magnetfeldes  $0 \text{ mT} \leq B \leq 500 \text{ mT}$ . Der dabei auftretende Aharonov-Bohm-Effekt hat eine Periode von  $\Delta B = 7,4 \text{ mT}$ , die gemäß Gleichung 2.30 einem Bahnradius von 422 nm entspricht, der

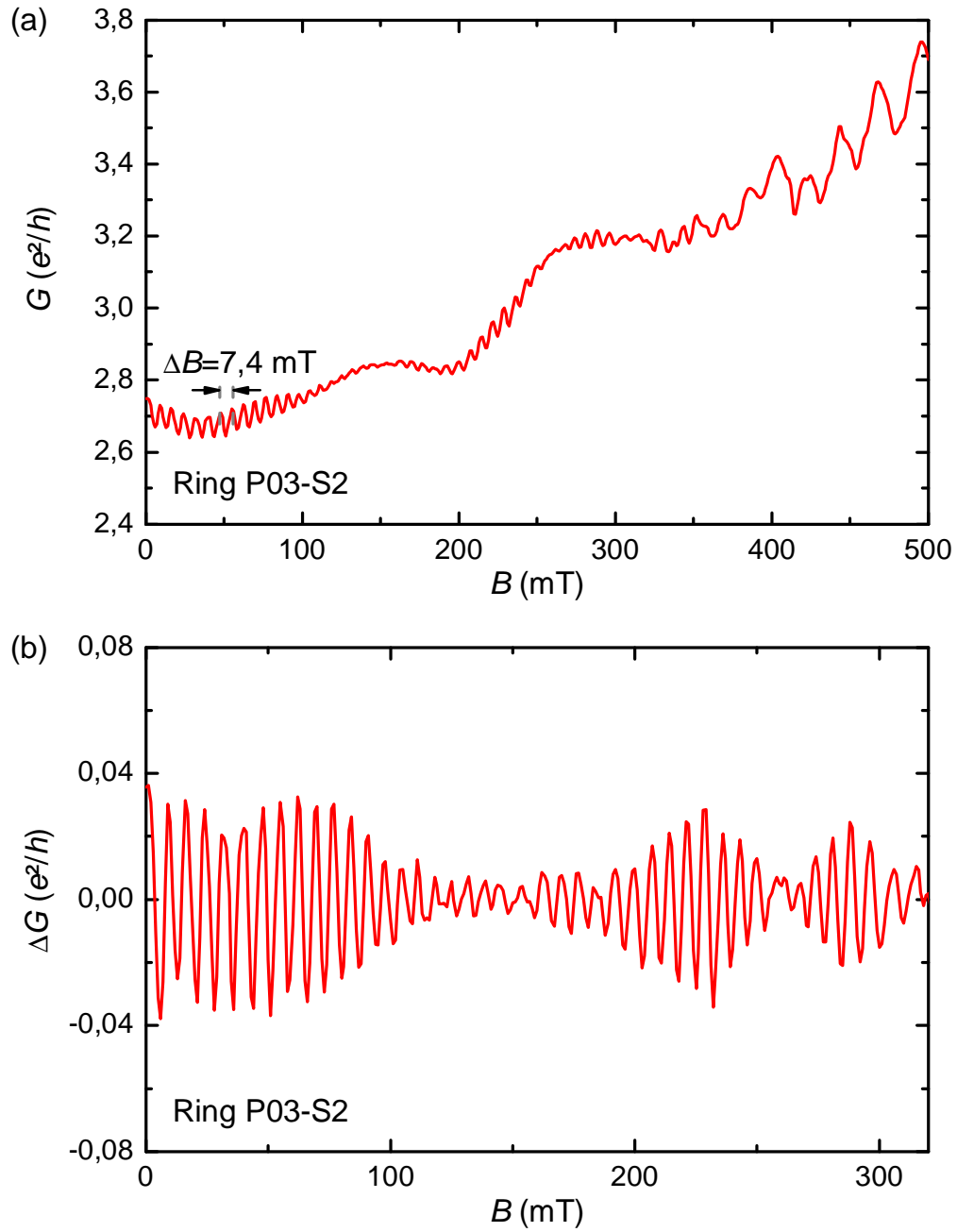


Abbildung 4.7: (a) Magnetotransport durch den Ring P03-S2 bei  $V_{G1} = -170$  mV,  $V_{G2} = 0$  mV und  $V_{G3} = V_{G4} = -100$  mV. (b) Die Kurve aus (a) nach Abzug des Untergrundes im Bereich vor den Shubnikov-de-Haas-Oszillationen.

sehr gut zur geschriebenen Geometrie passt. Ab einem Magnetfeld von etwa 320 mT kann der Effekt nicht mehr deutlich ausgemacht werden. Stattdessen setzten in diesem Bereich die Shubnikov-de-Haas-Oszillationen [79, 99] des 2DEG in den Zuleitungen ein. Bei Betrachtung der Kurve fällt auf, dass der Hintergrund der Leitfähigkeit leichte Wellen aufweist und dass die Amplitude der Aharonov-Bohm-Oszillationen stark moduliert ist. In Abbildung 4.7 (b) wird das gemessene Signal nach Abzug des durch Intervallmittelung bestimmten Hintergrundes über den Bereich des Aharonov-Bohm-Regimes noch einmal gezeigt. Es ist deutlich zu sehen, dass die Modulation der Oszillationsperiode zu einer Änderung der Wellenhöhe bis um maximal fast das zehnfache zwischen  $7,7 \cdot 10^{-3} e^2/h$  und  $7,4 \cdot 10^{-2} e^2/h$  führt. Diese Modulation verläuft allerdings nicht periodisch, sondern der Abstand zwischen den Minima der Amplitude wird mit zunehmendem Magnetfeld kleiner. Sie liegen hier bei  $B = 150$  mT, 260 mT und 310 mT. Außerdem nimmt die Höhe der Amplituden-Maxima nacheinander leicht ab.

Messungen an der Struktur P03-S5, dem kleineren Ring auf der Probe, zeigen ebenfalls einen Aharonov-Bohm-Effekt mit modulierter Amplitude. In Abbildung 4.8 ist die Differenz zwischen der Leitfähigkeit und einem abgezogenen Hintergrund für  $V_{G1} = -335$  mV,  $V_{G2} = -354$  mV und  $V_{G3} = V_{G4} = 50$  mV über dem Magnetfeldbereich  $0 \text{ mT} \leq B \leq 500 \text{ mT}$  dargestellt. Ab  $B = 300$  mT setzten hier die Shubnikov-de-Haas-Oszillationen ein, die zur Verdeutlichung noch einmal separat mit der schwarzen Kurve gezeigt werden. Davor ist aber eine deutliche Aharonov-Bohm-Periode von  $\Delta B = 82$  mT zu erkennen, die einem Bahnradius von 127 nm entspricht, der exakt zu der Geometrie der Oxidlinien passt. Die Wellenhöhe der modulierten Oszillationen liegt hier im Bereich zwischen  $2,9 \cdot 10^{-2} e^2/h$  und  $9,8 \cdot 10^{-2} e^2/h$ . Dabei besitzt die Modulation nur ein Maximum, welches bei 310 mT liegt.

Etwas ähnliches lässt sich auch an dem in Abschnitt 4.1 vorgestellten Ring 71000-HB9 vergleichbarer Größe beobachten, wie in Abbildung 4.8 (b) zu sehen ist. Dort ist die Leitfähigkeit bei  $V_{G1} = 0$  mV und  $V_{G2} = 96$  mV für  $0 \text{ mT} \leq B \leq 600 \text{ mT}$  dargestellt. Dabei ist auch eine Amplitudenmodulation mit einem einzelnen Maximum, das hier bei 300 mT liegt, zu sehen bevor die Shubnikov-de-Haas-Oszillationen dominant werden. Die Wellenhöhe variiert dabei zwischen  $2,1 \cdot 10^{-2} e^2/h$  und  $28,5 \cdot 10^{-2} e^2/h$ .

Bei den verschiedenen Strukturen ist jeweils eine Abhängigkeit der Modulation des Aharonov-Bohm-Effektes von den angelegten Gatespannungen zu beobachten. In Abbildung 4.9 (a) sind Messungen an Ring P03-S2 für  $V_{G1} = -130$  mV,  $V_{G3} = V_{G4} = -104$  mV und drei verschiedene Werte von  $V_{G2}$  gezeigt. Es ist dort zu gut erkennen, dass sich die Form der Modu-



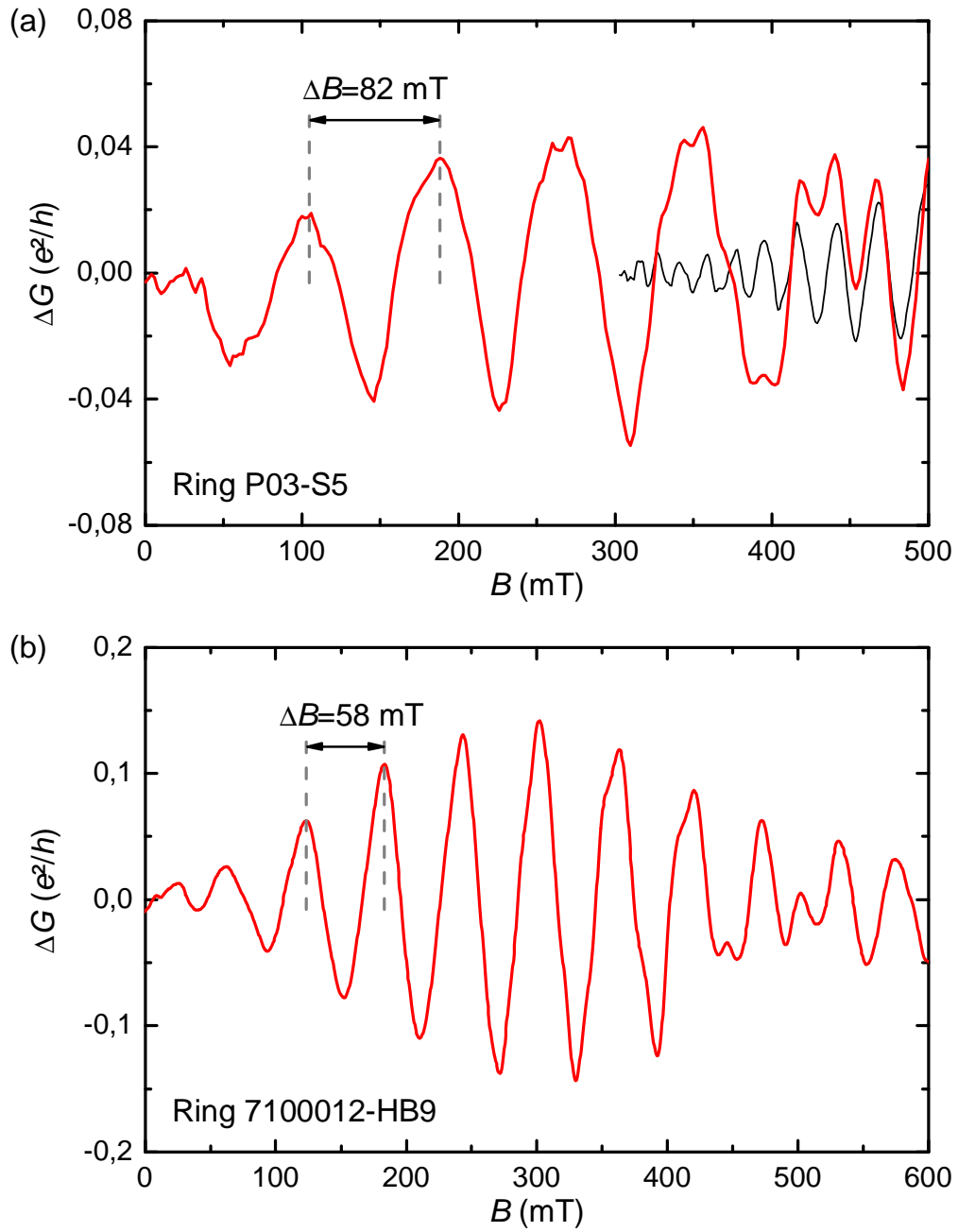


Abbildung 4.8: (a) Aharonov-Bohm-Effekt in Ring P03-S5 bei  $V_{G1} = -335$  mV,  $V_{G2} = -354$  mV und  $V_{G3} = V_{G4} = 50$  mV. Der Anteil der Shubnikov-de-Haas-Oszillationen im Signal ist einzeln als schwarze Kurve gezeigt. (b) Aharonov-Bohm-Effekt in Ring 7100012-HB9 bei  $V_{G1} = 0$  mV und  $V_{G2} = 96$  mV.

lation bei Variation der Gatespannung deutlich ändert. So tritt beispielsweise ein Maximum der Modulation bei  $B \sim 120 \text{ mT}$  für  $V_{G2} = -120 \text{ mV}$  auf, während an dieser Stelle für  $V_{G2} = -112 \text{ mV}$  ein schwaches und  $V_{G2} = -112 \text{ mV}$  ein ausgeprägtes Minimum vorliegt.

In Abbildung 4.9 (b) ist der Aharonov-Bohm-Effekt in Ring 710012-HB9 bei  $V_{G2} = 208 \text{ mV}$  und drei Werten von  $V_{G1}$  zu sehen. Auch hier ist die Modulation von der Gatespannung anhängig. Beispielsweise ist die Amplitude bei  $V_{G1} = 0 \text{ mV}$  für  $350 \text{ mT} \leq B \leq 800 \text{ mT}$  relativ konstant, während sie bei  $V_{G1} = -36 \text{ mV}$  und  $V_{G1} = 16 \text{ mV}$  ab  $B \sim 600 \text{ mT}$  wieder deutlich abfällt.

Erklärt werden könnte das Auftreten einer Amplitudenmodulation durch das Vorhandensein von zwei besetzten Subbändern in den Ringen, die leicht unterschiedlichen Bahnradien entsprechen und somit auch eine leicht unterschiedliche Periodizität des Aharonov-Bohm-Effekte aufweisen. In der Summe ihrer Leitfähigkeiten käme es dann zu einer Schwebung bei den beobachteten Oszillationen über dem Magnetfeld. Allerdings passt diese Erklärung nicht auf die beobachteten Verhältnisse. Denn zum Beispiel tritt im Ring 71000-HB9 die Modulation bei etwa gleichem Wert für  $V_{G2}$  erst bei weitaus kleineren  $V_{G1}$  deutlich ausgeprägt auf, wie ein Vergleich der Messung von Abbildung 4.2 mit der auf 4.8 (b) zeigt, obwohl eine besser sichtbare Ankopplung an ein zweites Subband eher für positivere Gatespannungen zu erwarten ist.

Ein andere Ansatz zur Deutung des Phänomens liegt in der Annahme von ausgeprägter Spin-Bahn-Kopplung [44, 100] in den Ringen. Abbildung 4.10 (a) zeigt die Simulation der Leitfähigkeit eines Rings mit starker Spin-Bahn-Wechselwirkung [101], die qualitativ gut zu dem hier noch einmal in Abbildung 4.10 (b) dargestellten Verhalten der Aharonov-Bohm-Amplitude im Ring P03-S2 passt. Die theoretisch berechnete Leitfähigkeit ist dabei über dem magnetischen Fluss in Anzahl von Flussquanten durch den Ring dargestellt und zeigt eine Modulation ähnlich der im Experiment beobachteten. Auch die Abstände zwischen den Minima der Amplitude werden kleiner, so wie es in der Messungen beobachtet wurde. Der Wert der maximalen Amplitude ist für diese idealisierte Betrachtung aber natürlich wesentlich höher als in dem real untersuchten Ring. Mit roten Linien sind Phasensprünge um  $\pi$  in der Oszillation markiert, die sich bei der Berechnung an den Stellen minimaler Amplitude ergeben. An den Minima der Amplitude bei der Messung an Ring P03-S2 sind bei genauer Betrachtung auch solcher Phasensprünge erkennen, deren Position jeweils mit einer schwarzen Linien markiert ist. Diese Phasensprünge sind auch ein weiteres Indiz dafür, dass hier keine Schwebung durch die Überlage-

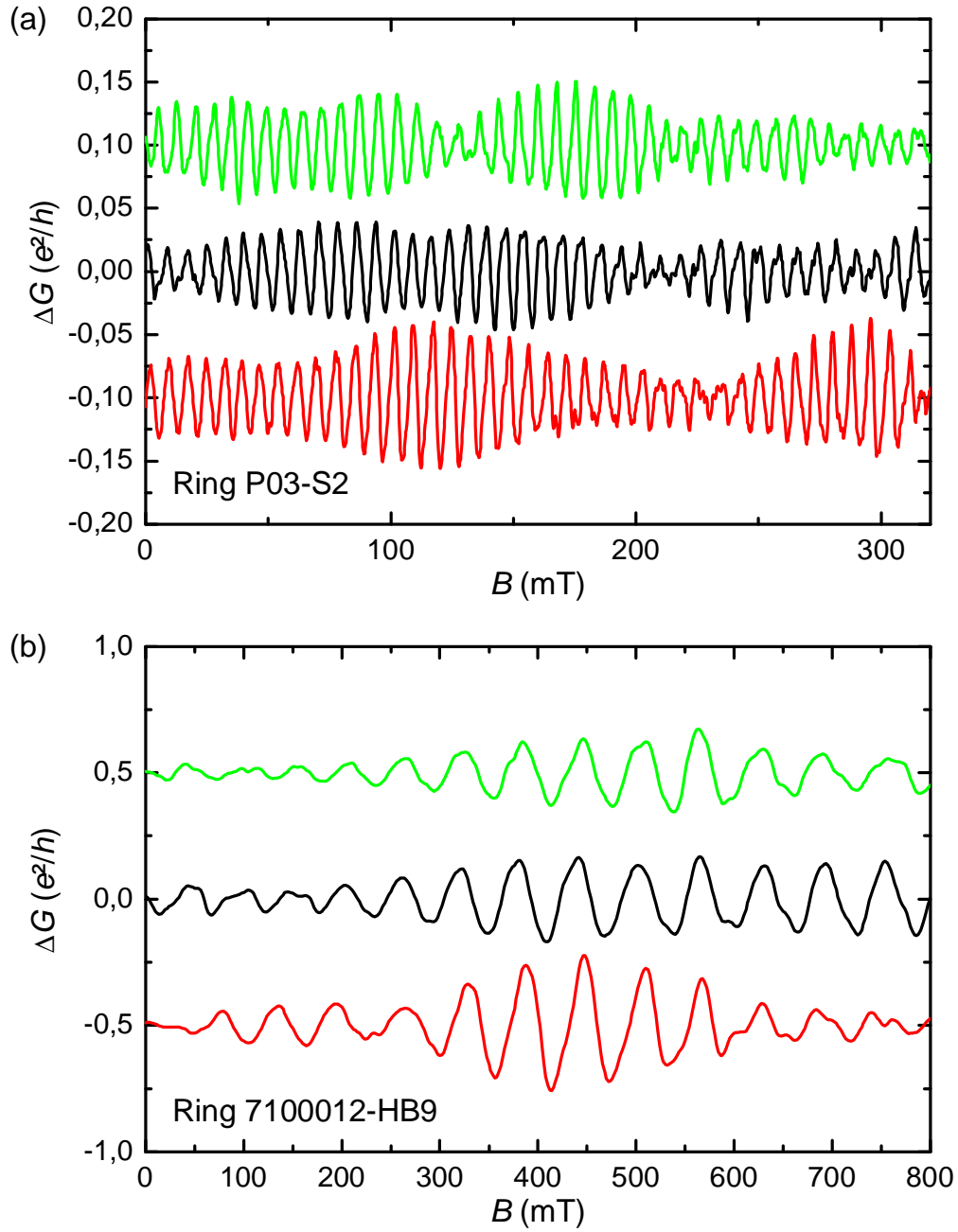


Abbildung 4.9: (a) Modulation des Aharonov-Bohm-Effektes in (a) Ring P03-S2 bei  $V_{G1} = -130$  mV,  $V_{G3} = V_{G4} = -104$  mV und  $V_{G2} = -120$  mV (rot),  $-112$  mV (schwarz)  $-106$  mV (grün) (b) Ring 7100012-HB9 bei  $V_{G2} = 208$  mV und  $V_{G1} = -36$  mV (rot),  $0$  mV (schwarz)  $16$  mV (grün). Die Kurven sind zur besseren Übersicht gegeneinander verschoben.

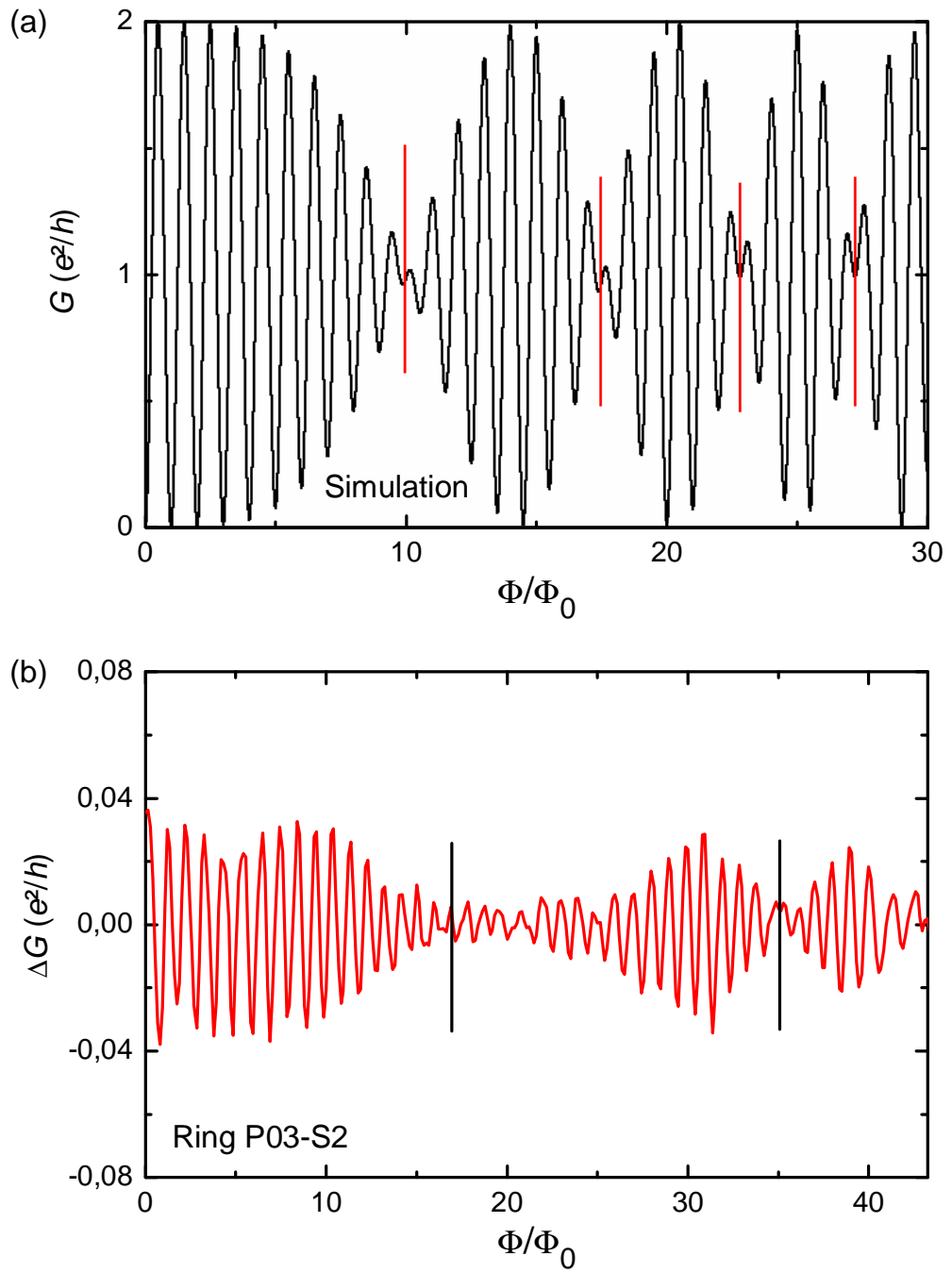


Abbildung 4.10: (a) Simulation der Leitfähigkeit eines Rings mit ausgeprägter Spin-Bahn-Kopplung über dem umschlossenen magnetischen Fluss  $\Phi$  in Einheiten des Flussquantums  $\Phi_0$ . Phasensprünge sind markiert. Diese Kurve wurde von Tagliacozzo *et al.* [101] berechnet. (b) Die Messung am Ring P03-S2 aus Abbildung 4.7, dargestellt über  $\Phi$  mit markierten Phasensprünge.

rung der Aharonov-Bohm-Frequenzen zweier Subbänder vorliegt, da sie dort nicht auftreten sollten. Es wären allerdings weitere Experimente, bei denen die Stärke der Spin-Bahn-Wechselwirkung in der Probe kontrolliert werden kann, notwendig, um den Zusammenhang dieses Mechanismus mit der Modulation der Aharonov-Bohm-Amplitude eindeutig zu bestätigen.

## 4.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Transportmessungen an einfachen Quantenringen betrachtet.

Der zuerst beschriebene Ring zeigte bei starker Kopplung an die Zuleitungen im senkrechten Magnetfeld Aharonov-Bohm-Oszillationen mit passender Periodizität. Es wurde auch die Abhängigkeit der Phase des Aharonov-Bohm-Effektes von einer angelegten Gatespannung beobachtet. Dagegen trat bei Tunnelkopplung an die Zuleitungen und wenigen Elektronen auf dem Ring eine auf ein Drittel reduzierte Aharonov-Bohm-Periode auf. Dies konnte als Auswirkung von Elektron-Elektron-Wechselwirkung erklärt werden. Beim Durchfahren einer Gatespannung zeigten diese Oszillationen einen Phasensprung von  $\pi$  an den Coulomb-Peaks. Im dazwischenliegenden Bereich verschob sich ihre Phase von einem Peak zum nächsten um  $\pi$ , wenn dort kein Kondo-Effekt vorlag, und annähernd  $2\pi$ , wenn es Kondo-Leitfähigkeit gab. Dieses Verhalten war analog zu dem der normalen Aharonov-Bohm-Oszillationen in Quantenringen mit einem eingebetteten Quantenpunkt, wie ein Vergleich mit entsprechender Literatur ergab. Außerdem wurde das Transportspektrum des Rings über einen großen Bereich einer Gatespannung und des externen Magnetfeldes aufgenommen. In einem ausgedehnten Gebiet oberhalb von  $V_{G2} \sim -110 \text{ mV}$  und  $B \sim 1,5 \text{ T}$  fiel dort ein weitgehend konstanter Hintergrund in der Leitfähigkeit auf.

Danach wurden zwei weitere Quantenringe mit unterschiedlichen Radien vorgestellt. Die Amplitude der normalen Aharonov-Bohm-Oszillationen zeigte bei allen drei in diesem Kapitel betrachteten Strukturen eine deutliche Modulation. Der Vergleich mit einer theoretischen Berechnung legte eine Deutung dieses Phänomens als Auswirkung von Spin-Bahn-Wechselwirkung nahe.



# Kapitel 5

## Konzentrische Quantenringe

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einer Struktur, die aus zwei getrennten, konzentrischen Quantenringen besteht. Der äußere dieser beiden ist mit Zuleitungen verbunden, während der innere nur kapazitiv an den Rest der Struktur gekoppelt ist. Gemäß einem Vergleich mit der Literatur ist dieser konzentrische Doppelring der erste, der mittels AFM-Lithografie realisiert wurde, und der erste, der für laterale Transportmessungen geeignet ist.

Betrachtet wird der elektronische Transport über die Zuleitungen des äußeren Rings in Abhängigkeit eines externen Magnetfeldes. Dabei zeigt die Leitfähigkeit nicht nur den Aharonov-Bohm-Effekt, der zu den Abmessungen des äußeren Rings passt, sondern zusätzlich auch eine weitere Komponente, deren Periodizität dem Durchmesser des inneren Rings entspricht. Dies ist zu erklären, wenn angenommen wird, dass die Ladung auf dem inneren Ring magnetfeldabhängig verschoben wird und durch elektrostatische Wechselwirkung die Leitfähigkeit des äußeren Rings moduliert.

### 5.1 Die Struktur P04A-S1

Die Probe P04A wurde aus Material des Wafers C021287B gefertigt. Der Aufbau dieser GaAs/AlGaAs-Heterostruktur ist in Abschnitt 3.2 dargestellt. Mittels optischer Lithografie wurden darauf mehrere Mesas der in Abschnitt 3.3 gezeigten Stern-Form wie dort beschrieben hergestellt und mit Kontakt-Pads aus Gold versehen. Auf einem dieser Mesa-Bereiche wurde durch AFM-Lithografie mit der Methode der lokalen anodischen Oxidation, wie in Abschnitt 3.4 erläutert, die eigentliche Quantenstruktur P04A-S1 erzeugt. Dabei handelt es sich um eine Kombination aus zwei in derselben Ebene liegenden, konzentrischen Quantenringen.

Ein AFM-Bild dieses Doppelrings wird in Abbildung 5.1 (a) gezeigt. Die dort gut sichtbaren Oxidlinien haben jeweils eine Breite von etwa 100 nm bis 150 nm. Die äußere der beiden durch sie definierten ringförmigen Lei-

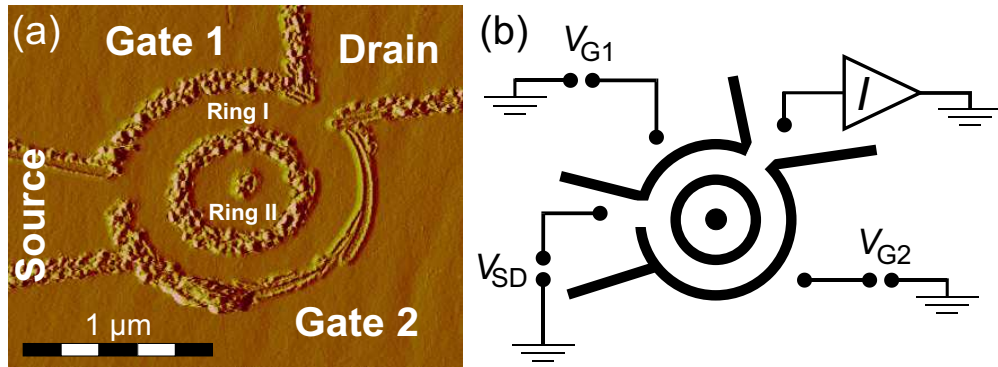


Abbildung 5.1: (a) AFM-Bild der Struktur P04A-S1. (b) Schema der elektrischen Anschlüsse für die Messungen.

terbahnen, Ring I, ist über je eine 110 nm breite Engstelle mit den zwei Zuleitungen „Source“ (S) und „Drain“ (D) verbunden. Dagegen ist der innere Ring II komplett von einer durchgehenden Oxidbarriere umgeben und so vollständig vom Rest der Struktur isoliert. Weil die gekrümmten Oxidlinien keine exakten Kreisbögen darstellen, besitzen beide Ringe eine leichte Ellipsität. Der mittlere Durchmesser der äußeren Begrenzung von Ring I beträgt dabei 1100 nm und der seiner inneren 710 nm. Ring II hat am äußeren Rand einen Durchmesser von im Mittel 460 nm und besitzt im Zentrum einen 150 nm breiten Oxidpunkt. Zwischen den Zuleitungen befinden sich zwei Bereiche, die als Gates Verwendung finden. Sie werden im Folgenden wie auf der Abbildung gekennzeichnet als „Gate 1“ (G1) und „Gate 2“ (G2) bezeichnet. Mit ihrer Hilfe kann das elektrochemische Potenzial der Ringe sowie die Kopplung an die Zuleitungen variiert werden. Dabei ist die Asymmetrie der Gates zu beachten. G1 grenzt entlang einer kürzeren Linie an den Doppelring als Gate B, sodass G2 einen entsprechend stärkeren Einfluss auf die Struktur hat. Des Weiteren liegt G2 weiter entfernt von der Engstelle, die Ring I mit der Zuleitung Source verbindet, als von der zwischen Ring I und Drain, während G1 bis an beide Engstellen heranreicht. Dies wirkt sich entsprechend auf die Beeinflussung der Kopplungsstärken durch die beiden Gates aus.

Abbildung 5.1 (b) zeigt schematisch, wie die Probe für die im Folgenden beschriebenen Messungen beschaltet wurde. Dabei kam wieder der in Abschnitt 3.6 beschriebene Aufbau zum Einsatz. Außerdem war die Probe im in Abschnitt 3.5 vorgestellten Kryostaten vom Typ KelvinoxTLM montiert, sodass ihre Temperatur  $T$  auf 20 mK gehalten und ein externes Magnetfeld  $B$  senkrecht zur Ebene des Doppelrings erzeugt werden konnte.



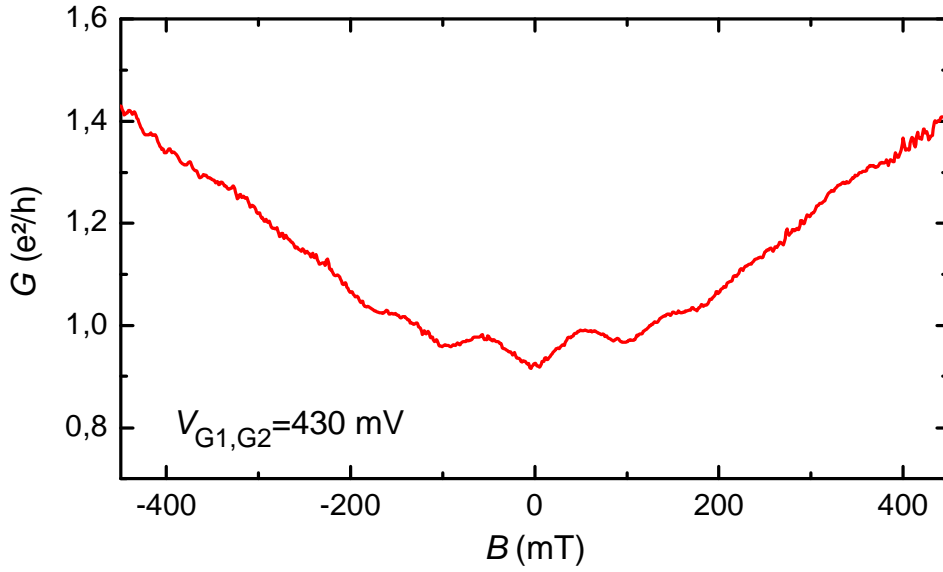


Abbildung 5.2: Die Leitfähigkeit  $G$  durch Ring I in Abhängigkeit des äußeren Magnetfeldes  $B$  bei  $V_{G1,G2} = 430$  mV.

## 5.2 Magnetotransport durch Ring I

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Messungen am Doppelquantenring P04A-S1 wurden im offenen Regime durchgeführt, das heißt bei einer Leitfähigkeit der Engstellen in der Größenordnung von  $2e^2/h$ . Da die Engstellen ohne zusätzlich angelegte Gatespannungen deutlich weiter geschlossen sind, wurden an beide Gates positive Spannungen  $V_{G1}$  und  $V_{G2}$  angelegt. So wurden bei der in diesem Abschnitt vorgestellten Messreihe beide Gatespannungen auf denselben Wert  $V_{G1,G2}$  gesetzt und von 370 mV bis 440 mV mit einer Schrittweite von 1 mV variiert.

Für jede dieser Gate-Konfigurationen wurde dann das externe Magnetfeld  $B$  von  $-500$  mT bis  $500$  mT in Schritten von 1 mT durchgefahen, während die Leitfähigkeit  $G$  durch Ring I gemessen wurde. Es wurden hier keine größeren Werte für das Magnetfeld verwendet, da ab ungefähr  $|B| = 450$  mT die Shubnikov-de-Haas-Oszillationen des 2DEG die Form des Signals dominieren und die Beobachtung von Struktur-spezifischen Komponenten in der Leitfähigkeit verhindern.

Die für  $V_{G1,G2} = 430$  mV gemessene Leitfähigkeit ist in Abbildung 5.2 in Abhängigkeit von  $B$  dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, dass die Kurve mit zunehmenden Magnetfeld von  $0,9 e^2/h$  bis  $1,6 e^2/h$  ansteigt. Außerdem sind ein Tal bei Nullfeld sowie leichte Oszillationen über den dargestellten

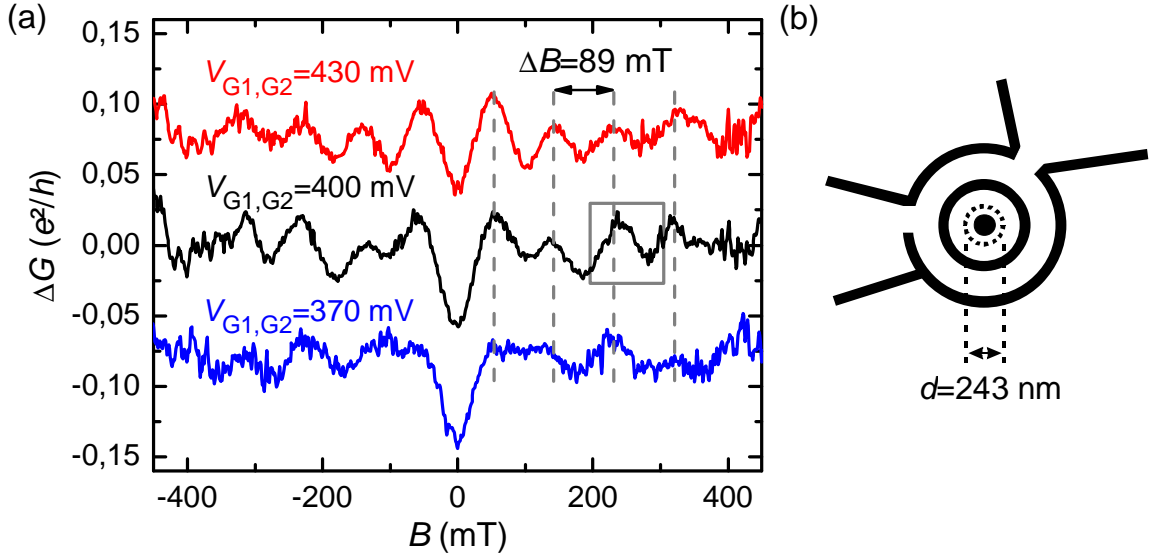


Abbildung 5.3: (a) Die Differenz  $\Delta G$  zwischen der Leitfähigkeit  $G$  durch Ring I und dem abgezogenen Hintergrund in Abhängigkeit von  $B$  für die drei angegebenen Werte von  $V_{G1,G2}$ . Die rote und die blaue Kurve sind zur besseren Übersicht um  $0,8 e^2/h$  nach oben bzw. unten verschoben. Die Periode  $\Delta B = 89$  mT der auftretenden Oszillationen ist angegeben und der graue Kasten markiert den Bereich, der in Abbildung 5.4 gezeigt wird. (b) Die Bahn mit dem Durchmesser  $d = 243$  nm, der einer Aharonov-Bohm-Periode von  $\Delta B = 89$  mT entspricht.

Bereich zu erkennen. Dazu setzen ab einem Magnetfeldbetrag von etwa 350 mT die schon erwähnten Shubnikov-de-Haas-Oszillationen ein. Um die zuvor genannten schwachen Oszillationen genauer betrachten zu können, wurde für jede Kurve durch Intervallmittelung der Hintergrund berechnet, der dann von den Rohdaten abgezogen wurde. Der übrig bleibende Signalanteil  $\Delta G$  wird für drei verschiedene Werte von  $V_{G1,G2}$  in Abbildung 5.3 (a) gezeigt.

Ein Vergleich zeigt, dass die deutlich sichtbaren Schwingungen über den betrachteten Bereich weitgehend unabhängig von der Gatespannung sind. Sie haben dabei eine Wellenhöhe von  $2,5 \cdot 10^{-2} e^2/h$  und über dem Magnetfeld eine Periode von  $\Delta B = 89$  mT. Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass noch eine weitere Art von Oszillationen mit viel geringerer Amplitude und kürzerer Periodizität im Signal vorhanden sind. Diese kleinen Schwingungen mit einer Wellenhöhe von maximal  $3,5 \cdot 10^{-3} e^2/h$  sind leichter zu erkennen, wenn niedrigere Frequenzen aus dem Signal entfernt werden.

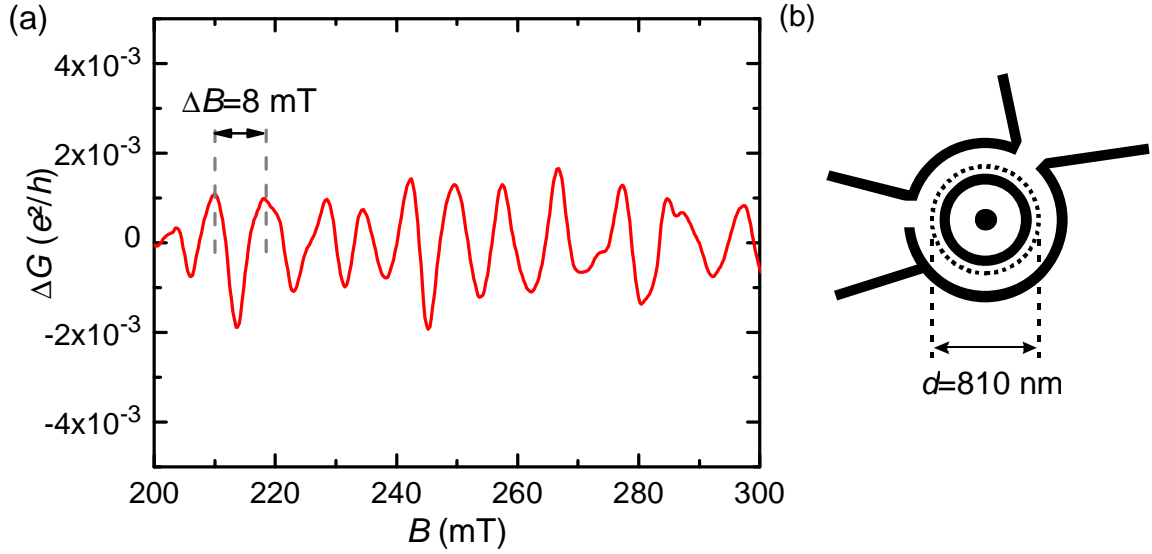


Abbildung 5.4: (a) Die Differenz  $\Delta G$  zwischen der Leitfähigkeit  $G$  von Ring I und dem Hintergrund, der auch die großen Oszillationen enthält, in Abhängigkeit von  $B$  über dem Intervall, das in Abbildung 5.3 (a) markiert ist. Die Kurve zeigt das Mittel der Messungen mit  $370 \text{ mV} \leq V_{G1,G2} \leq 440 \text{ mV}$ . Die Periode  $\Delta B = 8 \text{ mT}$  der auftretenden Oszillationen ist angegeben. (b) Die Bahn mit dem Durchmesser  $d = 810 \text{ nm}$ , der einer Aharonov-Bohm-Periode von  $\Delta B = 8 \text{ mT}$  entspricht.

Daher wurde dem Signal erneut ein Hintergrund abgezogen, der diesmal aber durch Mittelung über ein entsprechend kürzer gewähltes Intervall bestimmt wurde, sodass auch die größeren Schwingungen verschwinden. Um die kleinen Oszillationen dazu noch besser aus dem vorhandenen Rauschen hervortreten zu lassen, wurden alle 71 Kurven der Messungen aus dem Bereich  $370 \text{ mV} \leq V_{G1,G2} \leq 440 \text{ mV}$  gemittelt. Dies war möglich, da auch hier eine Unabhängigkeit von der Gatespannung im betrachteten Intervall vorliegt. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.4 (a) zu sehen und zeigt deutlich eine Oszillationsperiode von  $\Delta B = 8 \text{ mT}$ .

Gemäß Gleichung 2.29 lässt sich aus der Periode von Aharonov-Bohm Oszillationen die vom Weg der Elektronen umschlossene Fläche  $F$  berechnen. Für die kleinen Oszillationen ergibt sich damit  $F = 0,515 \mu\text{m}^2$ , was der Fläche entspricht, die von einem kreisförmigen Pfad mit einem Durchmesser von  $d = 810 \text{ nm}$  begrenzt wird. In der Struktur liegt ein solcher Weg im inneren Bereich des äußeren Rings, wie in Abbildung 5.4 (b) schematisch dargestellt ist. Daher können die kleinen Oszillationen dem normalen

Aharonov-Bohm-Effekt aufgrund des Transports durch Ring I zugeschrieben werden.

Die Beobachtung, dass die Amplitude dieser Oszillationen weniger als 0,5 % des Gesamtsignals ausmacht ist durch die Annahme von Unregelmäßigkeiten in der Form des Einschlusspotenzials zu erklären. Solche Störungen können die Sichtbarkeit von Aharonov-Bohm Oszillationen in Quantenringen stark reduzieren oder sogar ganz unterdrücken. [102]

Betrachtet man die zuerst beschriebenen, stärker ausgeprägten Oszillationen, so ergeben sich aus ihrer Periode  $\Delta B = 89 \text{ mT}$  eine umschlossene Fläche  $F = 0,046 \mu\text{m}^2$  und damit ein Bahndurchmesser von  $d = 243 \text{ nm}$ . Eine solche Bahn kann in der vorliegenden Struktur nur innerhalb von Ring II liegen, so wie es in Abbildung 5.3 (b) schematisch gezeigt wird. Insofern ist das Auftreten der entsprechenden Oszillationen sehr interessant, da Ring II nicht von den am Transport beteiligten Elektronen durchquert werden kann, sondern nur elektrostatisch an Ring I gekoppelt ist.

### 5.3 Kopplung zwischen Ring I und Ring II

Die theoretische Beschreibung von konzentrischen Quantenringen in der Literatur beschäftigt sich in den meisten Fällen nicht mit Strukturen, die mit der hier beschriebenen Probe vergleichbar sind. In den meisten Fällen geht es nur um Systeme, in denen Tunnelkopplung zwischen den einzelnen Ringen vorliegt. [103, 104] Ein Modell [105], das getrennte konzentrische Ringe beschreibt, legt zwar nahe, dass Coulomb-Drag den Aharonov-Bohm-Effekt beeinflusst, zeigt aber nicht, wie die Oszillationsperiode des einen Rings dem anderen aufgeprägt werden kann, so wie es in den vorliegenden Messungen beobachtet wird. Allerdings stellen Büttiker *et al.* [106–108] einen Ansatz vor, mit dessen Hilfe sich herleiten lässt, wie Ladung in einer asymmetrischen Ringstruktur durch den umschlossenen magnetischen Fluss periodisch umverteilt wird. Weil in diesem Fall die elektrostatische Wechselwirkung mit der näheren Umgebung entsprechend variiert, ist dann auch die periodische Modulation der Leitfähigkeit einer benachbarte Struktur vorstellbar.

Im Folgenden wird eine weitere Herangehensweise vorgestellt, die zur Erklärung einer ähnlichen Ladungsverschiebung in einem Quantenring von einer Umbesetzung der elektronischen Energieniveaus durch den umschlossenen magnetischen Fluss ausgeht. Eine analoge Umbesetzung von Energieniveaus durch ein Magnetfeld in einem Quantenpunkt, die zu einer deutlichen Beeinflussung des Transports durch einen benachbarten Quanten-

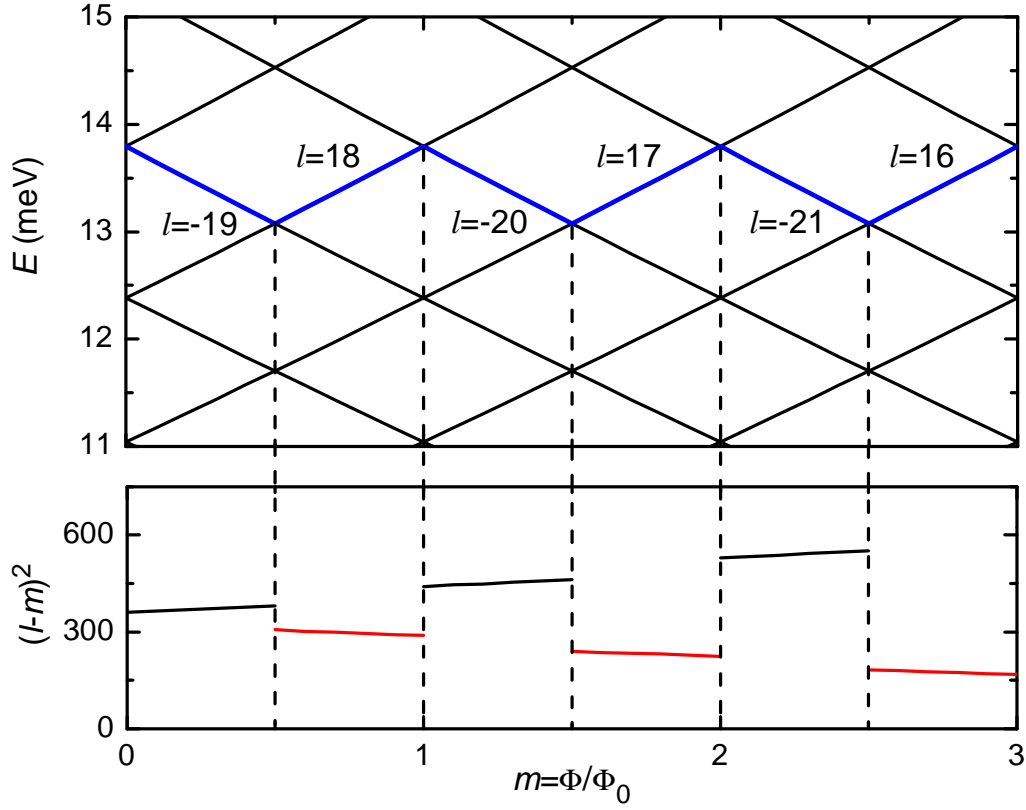


Abbildung 5.5: Oberer Teil: Ausschnitt aus dem theoretischen Energiespektrum von Ring II über der magnetischen Quantenzahl  $m$ . Die blaue Linie markiert den Verlauf an der Fermi-Kante. Die Drehimpulsquantenzahlen  $l$  für die einzelnen Abschnitte sind angegeben. Unterer Teil: Entwicklung des Terms  $(l - m)^2$  über demselben Bereich.

punktkontakt führt, wird von Fricke *et al.* [109] beschrieben. Des Weiteren wird die geringe Abweichung der realen Gestalt von Ring II von den idealisierten Annahmen im Verlauf der Betrachtung als nicht wesentlich für die abgeleiteten Aussagen angenommen.

Der obere Teil von Abbildung 5.5 zeigt das theoretische Energiespektrum eines ideal eindimensionalen Quantenrings mit dem Radius von Ring II. Dort haben die einzelnen Niveaus, dargestellt über der magnetischen Quantenzahl  $m = \Phi/\Phi_0$ , die Form von verschobenen Parabeln gemäß Gleichung 2.39. Dabei ist  $\Phi$  ist der vom Ring umschlossene magnetische Fluss und  $\Phi_0$  das magnetische Flussquantum. Mit anwachsendem  $\Phi$  wechseln die Elektronen an entsprechenden Kreuzungspunkten zwischen Zuständen mit

unterschiedlichen  $l$ . Nimmt man eine Fermi-Energie  $E_F = 13,76 \text{ meV}$  an, die derjenigen entspricht, welche sich nach Gleichung 2.6 aus der Ladungsträgerdichte des freien 2DEG in der vorliegenden Probe ergibt, dann folgen die Elektronen an der Fermi-Kante der Zick-Zack-Linie, die im oberen Teil von Abbildung 5.5 markiert ist. Bei Nullfeld ist das höchste besetzte Zustand derjenige mit  $l = 19$ , während  $l$  für jede Zunahme des Fluss um  $\Phi_0/2$  nacheinander die Werte 18,  $-20$ , 17,  $-21$ , 16 und so weiter durchläuft. Betrachtet man von dieser Reihe jeweils nur die Drehimpulsquantenzahl für Segmente der Zick-Zack-Linie mit gleicher Steigung, so zeigt sich, dass sich der Betrag  $|l|$  von einem ansteigenden Abschnitt zum nächsten um 1 erhöht (19, ..., 20, ..., 21, ...). Von einem abfallenden Abschnitt zum nächsten verringert er sich dagegen um jeweils 1 (... , 18, ..., 17, ..., 16, ...). Also nimmt die Drehimpulsquantenzahl abwechselnd Werte aus diesen beiden Reihen an, wobei ihr Betrag in der einen stetig ansteigt und in der anderen kontinuierlich fällt. Aus diesem Verhalten lassen sich Rückschlüsse auf die radiale Verteilung der Elektronen im Ring ziehen, wenn man im weiteren Verlauf die bisher rein eindimensionale Beschreibung des Rings durch eine Betrachtung ersetzt, die die Zweidimensionalität der Struktur berücksichtigt. Ein entsprechendes Modell von Tan *et al.* [110] zeigt, dass die radiale Ausdehnung der Wellenfunktion von dem Term  $(l - m)^2$  abhängt. Für kleine  $m$ , wie bei dem im Experiment beobachteten Bereich mit bis zu maximal fünf Flussquanten innerhalb von Ring II, wird dieser Term von dem Wert für  $l$  dominiert. Daher führt das oben beschriebene abwechselnde Vorliegen von ansteigenden und abfallenden Werten von  $|l|$  zu einer ähnlich hin- und herspringenden Entwicklung für den ganzen Term  $(l - m)^2$ , wie sie im unteren Teil von Abbildung 5.5 dargestellt ist.

Für die exakte Berechnung der Ausdehnung der Wellenfunktion mit diesem Modell werden die Terme

$$\lambda = \sqrt{\hbar} \left( (eB)^2 + \frac{8E_F}{\Delta r^2} \right)^{-\frac{1}{4}} \quad \text{und} \quad (5.1)$$

$$M = \sqrt{(l - m)^2 + \frac{2E_F m^* r_0^4}{\hbar^2 \Delta r}}$$

definiert, wobei  $r_0$  der mittlere Radius des Rings,  $\Delta r$  die Breite der Ringbahn,  $m^*$  die effektive Masse eines Elektrons und  $\hbar$  das reduzierte Wirkungsquantum sind. Werden darüber hinaus die Gamma-Funktion durch  $\Gamma$  und die konfluente hypergeometrische Funktion durch  ${}_1F_1$  dargestellt, dann gilt für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\psi|^2$  eines Zustands  $\psi$  mit

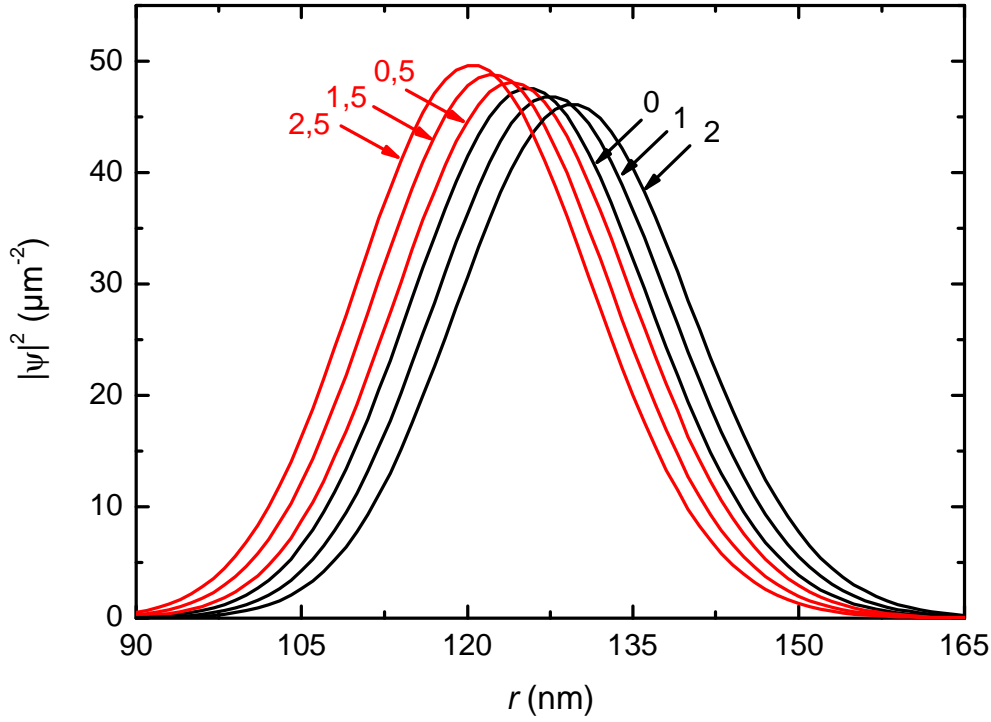


Abbildung 5.6: Die theoretisch berechneten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Elektronen in einem Quantenring über dem Abstand  $r$  vom Mittelpunkt. Der umschlossene magnetische Fluss ist für jede Kurve in Einheiten von  $\Phi_0$  angegeben.

den Quantenzahlen  $n$ ,  $l$  und  $m$  in Abhängigkeit der radialen Koordinate  $r$ :

$$|\psi|^2 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Gamma(n + M + 1)}{2^{M+1} n! (\Gamma(M + 1))^2 \pi} e^{-\frac{1}{2}(r/\lambda)^2} \cdot \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{2M} \left({}_1F_1\left(-n, M + 1, \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2\right)\right)^2 \quad (5.2)$$

In diesen Ausdruck können die Fermi-Energie  $E_F$  in der Struktur, der Radius  $r_0$  und die Breite  $\Delta r = 70$  nm von Ring II sowie die effektive Masse  $m^* = 6,10 \cdot 10^{-32}$  kg von Elektronen in GaAs [80] eingesetzt werden. Daraus ergeben sich die in Abbildung 5.6 dargestellten radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Energieniveaus, die an der Fermi-Kante nacheinander durchlaufen werden. Dafür wird jede der Kurven mit  $n = 0$  und den Werten von  $B$ ,  $l$  und  $m$  berechnet, die dem Beginn eines der Abschnitte im unteren Teil von Abbildung 5.5 entsprechen. Es ist dabei deutlich die

Abwechslung von engeren und weiter zum äußeren Rand gelagerten Verteilungen zu erkennen. Diese Umverteilungen führen dann wie beim der zuvor beschriebenen Erklärungsmöglichkeit zu einer Oszillation des elektrischen Feldes in der Umgebung von Ring II mit der entsprechenden Periode von  $\Phi_0$  über dem umschlossenen magnetischen Fluss. Somit lässt sich über die Coulomb-Wechselwirkung die Modulation des Transports im benachbarten Ring I qualitativ erklären.

## 5.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein konzentrischer Doppelquantenring vorgestellt. Dieser war die erste derartige Struktur, die mittels AFM-Lithografie realisiert wurde und für laterale Transportmessungen geeignet war.

Bei Variation des Magnetfeldes traten zwei Arten von überlagerten Oszillationen in der Leitfähigkeit des äußeren Rings auf. Die schwächer ausgeprägten dieser Oszillationen passten dabei zum erwarteten Aharonov-Bohm-Effekt des äußeren Rings. Dagegen entsprach die Periode der stärker ausgeprägten Oszillationen einer Bahn im inneren Ring, obwohl beide Ringe voneinander isoliert waren. Daher wurde eine Beeinflussung der gemessenen Leitfähigkeit durch elektrostatische Wechselwirkung zwischen den beiden Ringen angenommen. Mit Hilfe eines theoretischen Modells wurde dann die Ausdehnung der elektronischen Wellenfunktion im inneren Ring berechnet. Daraus ergab sich, dass die Ladungsverteilung dort in radialer Richtung mit der Aharonov-Bohm-Periode oszilliert, wenn das Magnetfeld variiert wird. Entsprechend wurde diese periodische Ladungsverschiebung als Ursache für die Modulation des Leitfähigkeit des äußeren Rings angesehen.



# Kapitel 6

## Quantenring mit Dreifachdot

Dieses Kapitel beschreibt die Untersuchung eines weiteren Quantenrings, der im Rahmen dieser Arbeit hergestellt wurde. Der leitfähiger Bereich dieser Struktur kann aufgrund der speziellen Form seines Einschlusspotenzials in drei Quantenpunkte aufgeteilt werden.

An dieser Probe wurde der elektronische Transport durch die Zuleitungen des Rings in Abhängigkeit der an den vorhandenen Gates angelegten Spannungen gemessen. Bei hohen positiven Spannungen verhält sich die Struktur wie ein gewöhnlicher Quantenring und zeigt im Magnetfeld entsprechende Aharonov-Bohm-Oszillationen. Diese verschwinden aber bei niedrigeren Spannungen. Dafür kann dann die Überlagerung der Coulomb-Blockade-Linien von drei verschiedenen Quantenpunkten beobachtet werden. Dies ist dadurch zu erklären, dass sich an Engstellen innerhalb des Rings Barrieren ausbilden, sodass drei voneinander getrennte Inseln entstehen.

### 6.1 Die Struktur P04B-S2

Die Probe P04B wurde auf Material der GaAs/AlGaAs-Heterostruktur C021287B gefertigt, deren Aufbau in Abschnitt 3.2 beschrieben ist. Auch hier wurden mit optischer Lithografie mehrere Mesas der in Abschnitt 3.3 gezeigten Stern-Form hergestellt und mit Kontakt-Pads aus Gold versehen. Durch lokale anodischen Oxidation mit dem AFM, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, wurde auf einem dieser Mesa-Bereiche die eigentliche Quantenstruktur P04B-S2 erzeugt. Dabei handelt es sich im wesentlichen um einen einfachen Ring ähnlich wie bei den in Kapitel 4 gezeigten Proben, der über asymmetrisch angeordnete Engstellen mit zwei Zuleitungen verbunden ist. Auch sind zwei Gates vorhanden, über die die Kopplung an die Zuleitungen sowie die Energie der Elektronen auf dem Ring geregelt werden kann. Der Entwurf hier beinhaltet aber zusätzlich einen Quantenpunktkontakt

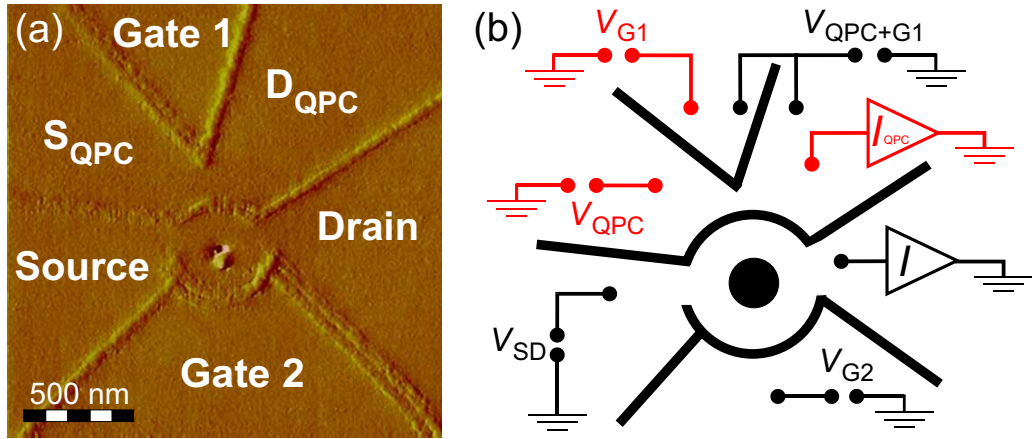


Abbildung 6.1: (a) AFM-Bild der Struktur P04B-S2. (b) Schema der elektrischen Anschlüsse für die Messungen. Für den QPC sind die beiden alternativen Beschaltungen in unterschiedlichen Farben dargestellt.

(QPC), der als Ladungsdetektor vorgesehen ist. Außerdem ist der Oxidpunkt in der Mitte des Rings deutlich asymmetrisch positioniert, sodass der obere Arm eine größere leitfähige Insel ausbildet, während der untere Arm durch eine Engstelle in zwei Segmente unterteilt wird. Schon diese Anordnung legt nahe, dass der Ring in diese drei Bereiche aufgeteilt werden kann.

Ein AFM-Bild der Struktur wird in Abbildung 6.1 (a) gezeigt. Die Oxidlinien haben jeweils eine Breite von etwa 60 nm bis 120 nm. Der mittlere Durchmesser der äußeren Begrenzung des geschriebenen Rings beträgt 360 nm, während er im Inneren einen 150 nm breiten Oxidpunkt besitzt. Außerdem ist er über je eine 100 nm breite Engstelle mit den beiden Zuleitungen „Source“ (S) und „Drain“ (D) verbunden. Neben dem in der Darstellung oberen Arm befindet sich ein 100 nm breiter Quantenpunktkontakt mit seinen eigenen Zuleitungen  $S_{QPC}$  und  $D_{QPC}$ . Dieser QPC kann, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, als Detektor für Ladungsänderungen im Ring benutzt werden. Zwei Bereiche, die vom Rest der Struktur isoliert sind, werden als Gates verwendet. Sie werden im Folgenden wie auf der Abbildung gekennzeichnet als „Gate 1“ (G1) und „Gate 2“ (G2) bezeichnet. Mit ihrer Hilfe können das elektrochemische Potenzial der Ringe, die Breite des QPC und die Kopplung an die Zuleitungen variiert werden. Dabei ist wieder die Asymmetrie der Gates zu beachten. So liegt G2 weiter entfernt von der Engstelle, die den Ring mit der Zuleitung S verbindet, als von der zwischen Ring und D, während sich G1 entfernt vom Ring auf der

anderen Seite des QPC befindet. Da die Gates an näher gelegene Bereiche stärker ankoppeln, wirkt sich dies entsprechend auf die Beeinflussung der genannten Parameter aus. Um aber auch von der in der Darstellung oberen Seite aus einen möglichst starken Einfluss auf den Ring nehmen zu können, wurde in den meisten Messungen auf die Verwendung des QPC als Ladungsdetektor verzichtet und das ganze Gebiet seiner Zuleitungen mit Gate 1 zu einer großen Gatefläche „QPC+G1“ zusammengeschaltet. Abbildung 5.1 (b) zeigt schematisch die beiden verwendeten Beschaltungen, für die wieder der in Abschnitt 3.6 beschriebene Aufbau zum Einsatz kam. Außerdem befand sich die Probe während der Messungen in dem in Abschnitt 3.5 vorgestellten Mischungskryostaten vom Typ KelvinoxTLM. Dort wurde ihre Temperatur auf  $T = 20$  mK gehalten und es konnte ein externes Magnetfeld  $B$  senkrecht zur Ebene des Rings erzeugt werden.

## 6.2 Magnetotransport

Die in diesem Abschnitt dargestellten Messungen am Quantenring P04B-S2 wurden unter Verwendung der zuvor beschriebenen Kombination aus G1 und QPC als Gate QPC+G1 durchgeführt.

Um die Ringnatur der Probe zu bestätigen wurde zuerst der Magnetotransport durch die Zuleitungen untersucht, wobei das Auftreten von Aharonov-Bohm-Oszillationen erwartet wurde. Die Ergebnisse der Messungen der differentiellen Leitfähigkeit  $G$  in Abhängigkeit der externen Magnetfeldes  $B$  sind in Abbildung 6.2 für zwei Einstellungen der Gatespannungen  $V_{G2}$  und  $V_{QPC+G1}$  dargestellt. Um Schwingungen in  $G$  deutlicher herauszustellen wird dort die Differenz  $\Delta G$  zwischen den gemessenen Rohdaten und dem Hintergrund gezeigt, der sich durch Glättung des Gesamtsignals per Intervallmittelung ergibt. Aharonov-Bohm-Oszillationen sind dann bei hohen positiven Gatespannungen deutlich auszumachen, wie die rote Linie für  $V_{QPC+G1} = 140$  mV,  $V_{G2} = 145$  mV zeigt. Ihre Wellenhöhe von  $0,02 e^2/h$  entspricht 1,5 % des abgezogenen Hintergrundes, der in etwa  $1,3 e^2/h$  beträgt. Ihre Periode von  $\Delta B = 51$  mT bedeutet für den elektronischen Weg durch den Ring gemäß Gleichung 2.30 einen Durchmesser von 321 nm, der gut zu der geschriebenen Geometrie passt. Das Anlegen von geringeren Gatespannungen führt aber letztendlich zu einem Verschwinden des Aharonov-Bohm-Effektes, wie an der schwarzen Linie für  $V_{QPC+G1} = 30$  mV,  $V_{G2} = 100$  mV zu erkennen ist. Diese Beobachtung zeigt also, dass weniger positive Gatespannungen zu einem Regime führen, in dem der kohärente Transport durch den Ring unterbrochen wird. Sie ist

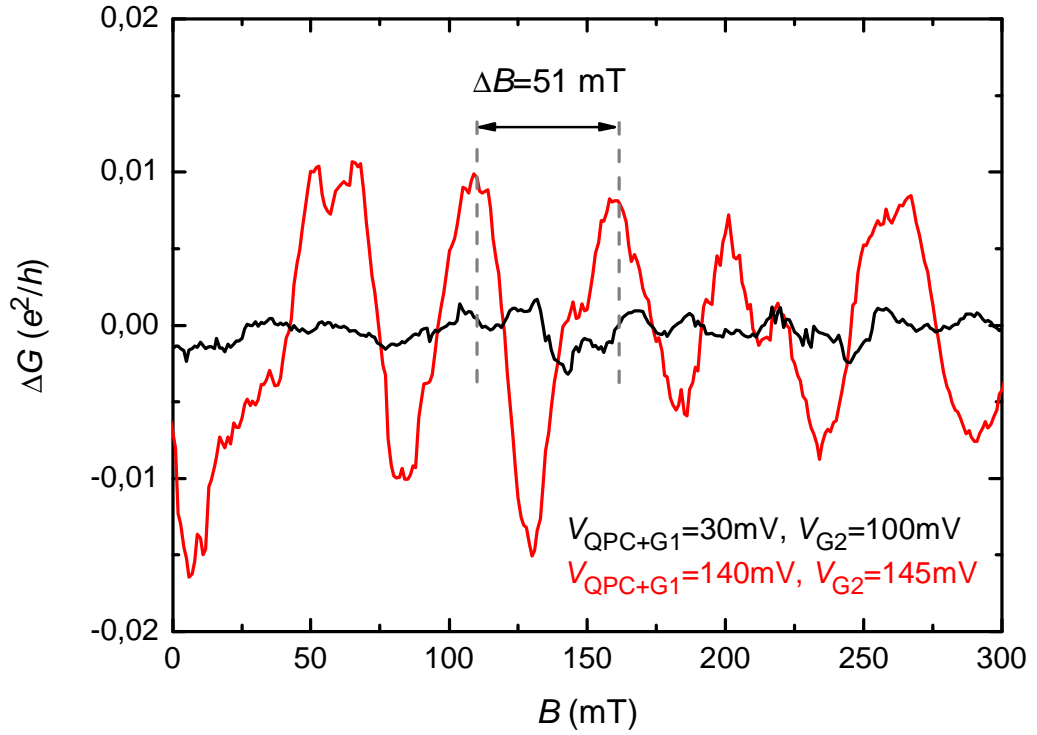


Abbildung 6.2: Die Differenz  $\Delta G$  zwischen der Leitfähigkeit des Rings und dem abgezogenen Hintergrund für  $V_{\text{QPC}+\text{G1}} = 140 \text{ mV}$ ,  $V_{\text{G2}} = 145 \text{ mV}$  (rote Kurve) und  $V_{\text{QPC}+\text{G1}} = 30 \text{ mV}$ ,  $V_{\text{G2}} = 100 \text{ mV}$  (schwarze Kurve).

daher konsistent mit der Annahme, dass der Ring in getrennte Segmente geteilt werden kann.

## 6.3 Transportspektrum

In Abbildung 6.3(a) wird das Transportspektrum gezeigt, das sich bei  $B = 0 \text{ T}$  ergibt. Dabei ist die differentielle Leitfähigkeit  $G$  in Abhängigkeit der Gatespannungen über die Bereiche  $-100 \text{ mV} \leq V_{\text{QPC}+\text{G1}} \leq 125 \text{ mV}$  und  $-100 \text{ mV} \leq V_{\text{G2}} \leq 170 \text{ mV}$  aufgetragen. Der Bereich im unteren, linken Teil der Darstellung zeigt ein Regime, in welchem die negativen Gatespannungen die Verbindungen zwischen dem Ring und den Zuleitungen effektiv schließen, sodass die Leitfähigkeit verschwindet. Dagegen ist die höchste Transmission durch die Struktur in der oberen, rechten Ecke zu erkennen, wo die Gatespannungen die größten positiven Werte besitzen. Zwischen diesen beiden Bereichen sind die Engstellen zwischen dem

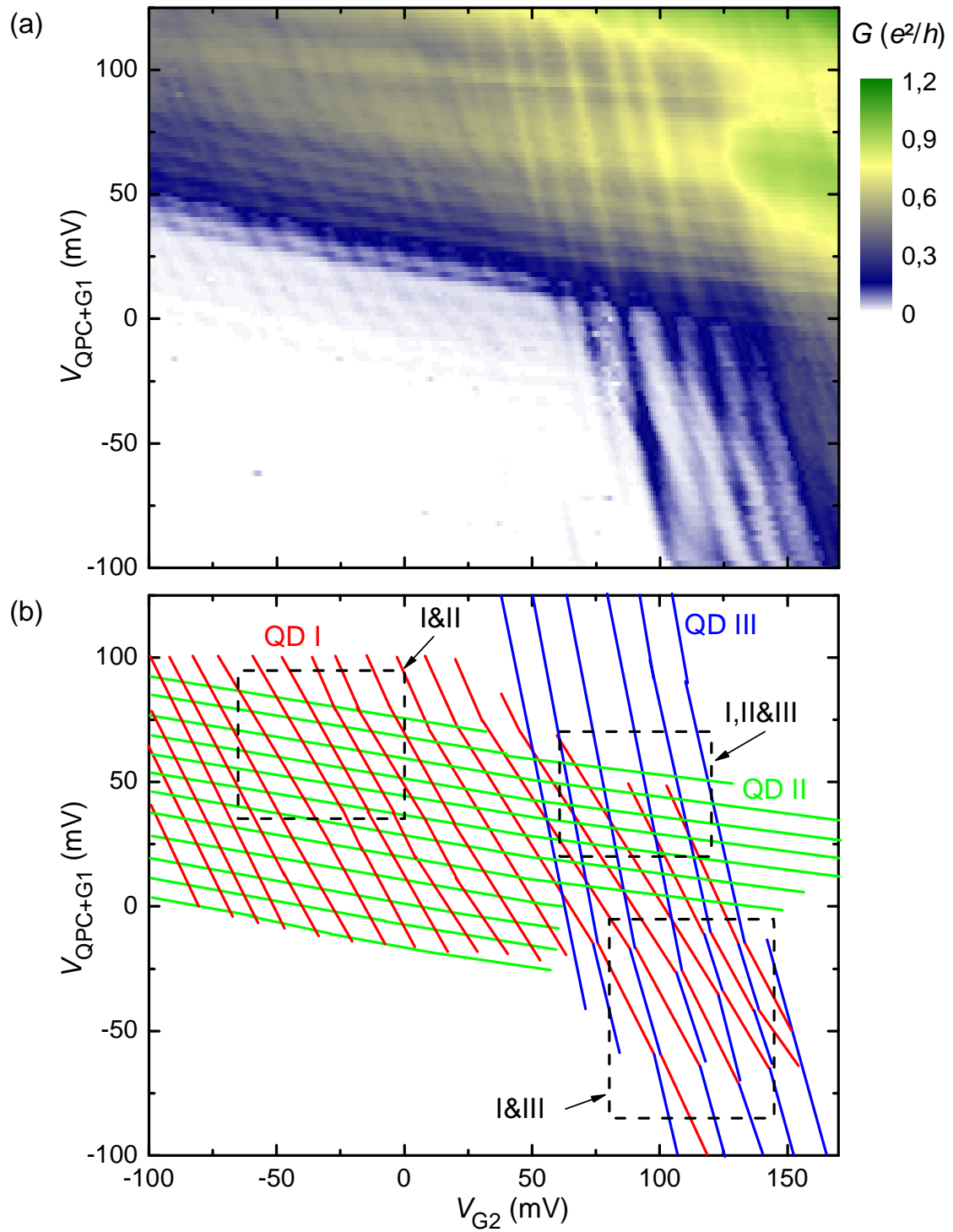


Abbildung 6.3: (a) Die Leitfähigkeit  $G$  des Rings in Abhängigkeit der Gatespannungen. (b) Verlauf der Linien in (a). Die gestrichelten Kästen markieren die Bereiche, die in Abbildung 6.3 gezeigt werden.

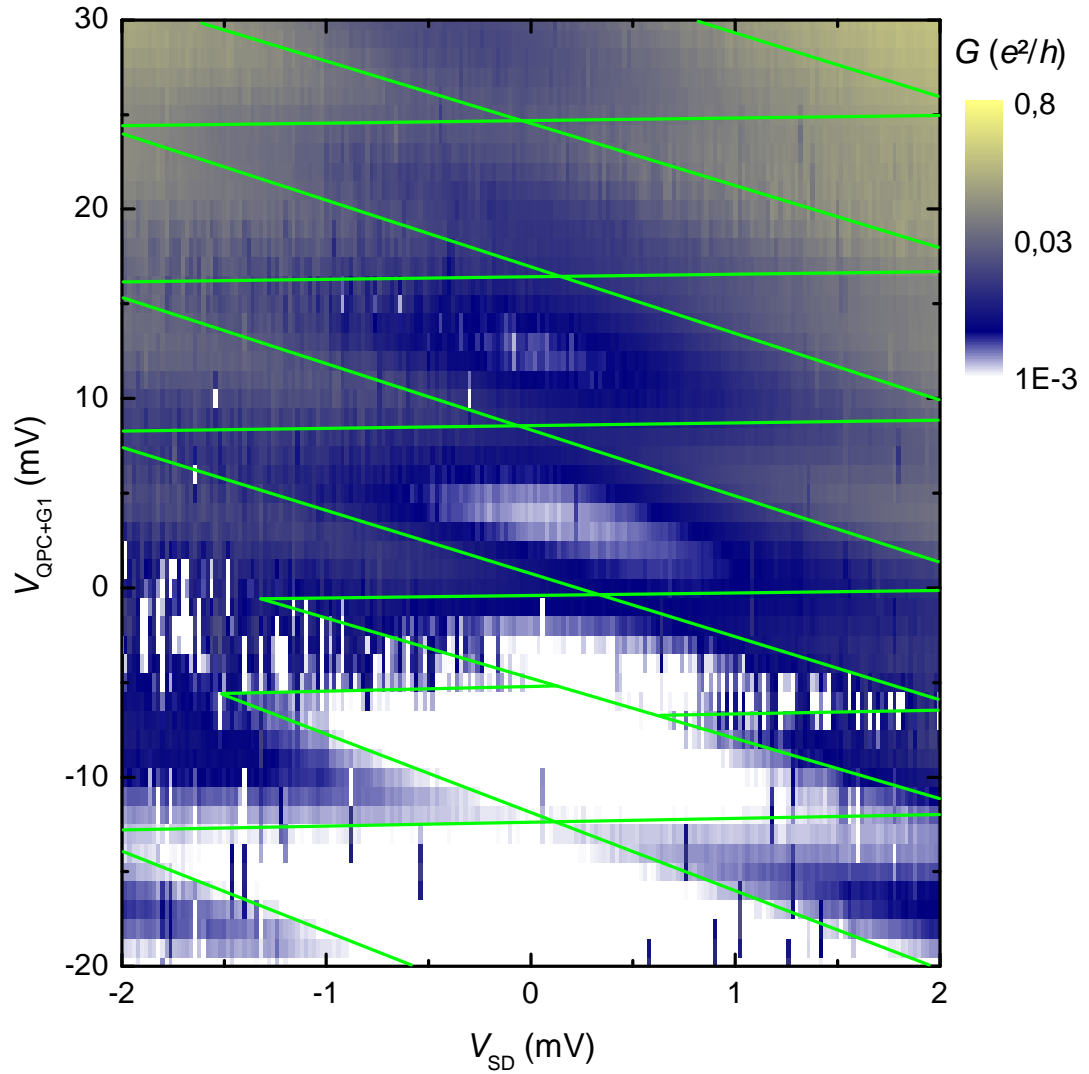


Abbildung 6.4: Die differentielle Leitfähigkeit  $G$  der Struktur bei  $V_{G2} = -25$  mV bei Variation von  $V_{QPC+G1}$  und einer über den Zuleitungen angelegten Gleichspannung  $V_{SD}$ . Es sind trotz einiger Unregelmäßigkeiten deutlich die Coulomb-Rauten von Quantenpunkt II zu erkennen, die hier grün nachgezeichnet sind.

Ring und den Zuleitungen so abgestimmt, dass sie dünne Tunnelbarrieren ausbilden. In diesem Regime sind Coulomb-Blockade-Linien zu erkennen, die in Abbildung 6.3(b) noch einmal schematisch über dem betrachteten Bereich dargestellt sind. Es ist dabei deutlich zu sehen, dass sich diese Linien anhand ihrer Steigungen in drei Gruppen einteilen lassen, was auf das Vorhandensein von drei verschiedenen Quantenpunkten in der Struktur hinweist. Außerdem ergeben zusätzliche Messungen in Abhängigkeit einer Source-Drain-Spannung bei jedem Satz von Linien Coulomb-Rauten und bestätigen damit, dass es sich um Blockade-Linien handelt. Zur Unterscheidung werden die Quantenpunkte (QDs) hier mit „I“, „II“ und „III“ bezeichnet. Eine Rauten-Messung über einen Teil der Linien von Quantenpunkt II wird in Abbildung 6.4 gezeigt.

Im Transportspektrum überlagern sich die Coulomb-Blockade-Linien der Quantenpunkte I und II mit schwacher gegenseitiger Beeinflussung. Dagegen treten an den Schnittpunkten der Linien von QD I und QD III im unteren rechten Viertel des Plots um die entsprechenden Tripelpunkte herum deutlichere Anticrossings auf. Dies legt gemäß Abschnitt 2.2 nahe, dass QD I stärker an QD III koppelt als an QD II. Des Weiteren deutet in beiden Fällen die abgerundete Form der Linien darauf hin, dass Tunnelkopplung zwischen den Quantenpunkten vorliegt. Da es keinen Bereich gibt, in dem sich die Linien von QD II mit denen von QD III schneiden, ohne dass die Linien von QD I ebenfalls überlagert sind, kann die Kopplung dieser beiden Quantenpunkte hier leider nicht separat betrachtet werden.

Die Bereiche, in denen deutliche Anticrossings auftreten, sind in Abbildung 6.3 unter Angabe der miteinander wechselwirkenden Quantenpunkte markiert und werden in höherer Auflösung noch einmal in Abbildung 6.5 gezeigt. Dabei ist in Abbildung 6.5 (a) nach Abzug eines Hintergrundes von der Leitfähigkeit die Wechselwirkung zwischen den Quantenpunkten I und II zu sehen, die für größere  $V_{\text{QPC}+\text{G1}}$  und kleinere  $V_{\text{G2}}$  erkennbar stärker hervortritt. Dies passt zu der Annahme, dass solche Gatespannungen diese beiden Quantenpunkte näher zusammenrücken lassen, da sie QD I im Ring weiter nach oben verschieben, während sich QD II aufgrund seiner Lage nicht weiter zurückziehen kann. In Abbildung 6.5 (b) sind die Anticrossings zwischen den Linien der Quantenpunkte I und III zu erkennen.

Abbildung 6.5 (c) zeigt schließlich den Bereich, in dem sich alle drei Sorten von Linien überlagern, wobei wieder ein Hintergrund abgezogen wurde. Dort treten kompliziertere Muster auf, die dem Vorliegen von Quadrupel-Punkten zuzuschreiben sind. An dieser Stelle liegt also Tunnel-Kopplung zwischen allen drei Quantenpunkten vor, sodass das System in diesem Regime einen echten Dreifachquantenpunkt darstellt.

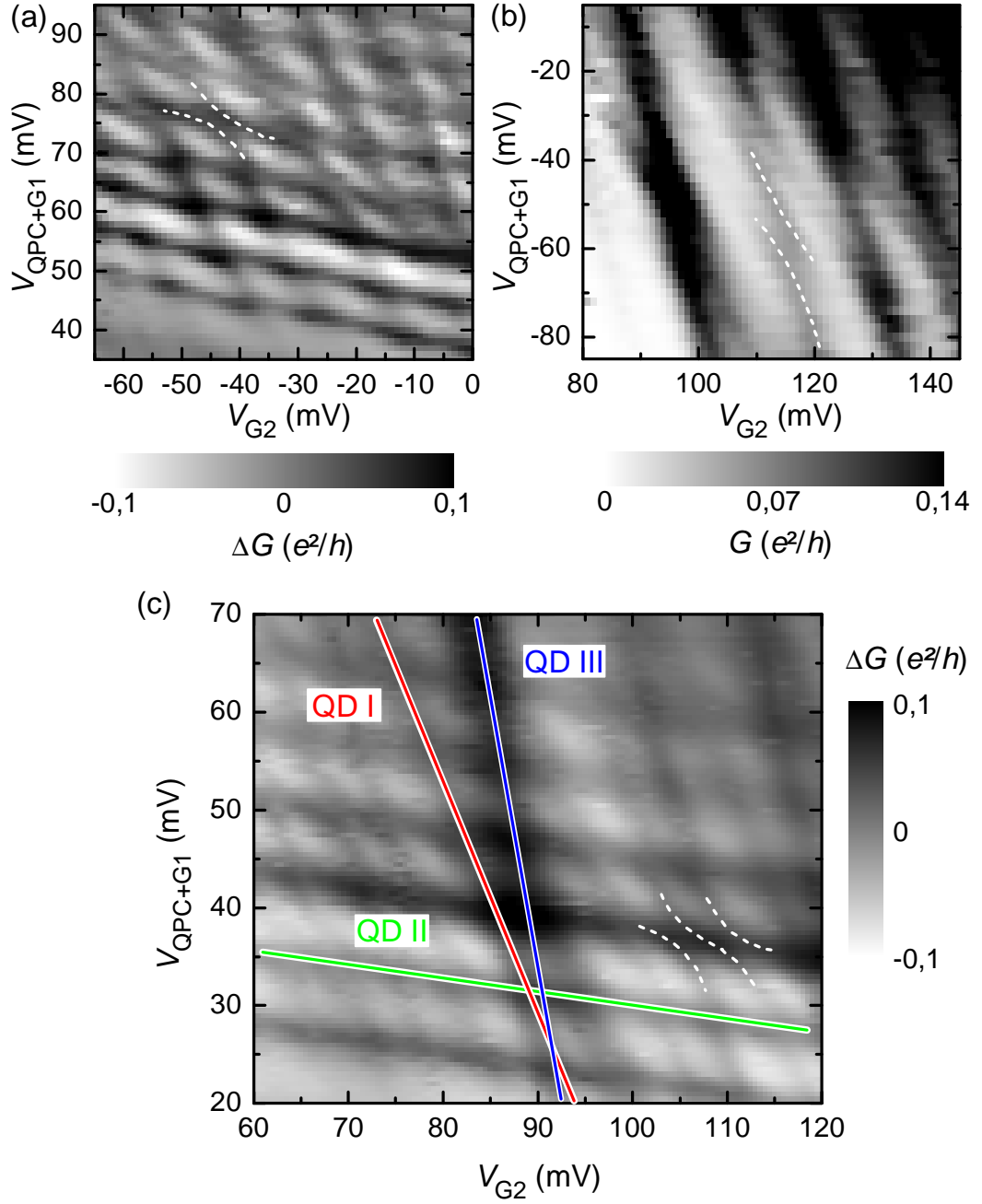


Abbildung 6.5: (a) Ein Bereich des Transportspektrums, in dem sich die Linien von QD I und II schneiden. Ein Anticrossing ist hervorgehoben. Es wird die Differenz  $\Delta G$  der Leitfähigkeit zu einem abgezogenen Hintergrund gezeigt. (b) Bereich, in dem sich die Linien von QD I und III schneiden. Ein Anticrossing ist hervorgehoben. (c) Bereich, in dem sich die Linien aller drei Quantenpunkte schneiden. Auch hier wurde ein Hintergrund abgezogen. Je eine Linie pro QD ist nachgezeichnet. Der Verlauf eines Kreuzungsmusters ist hervorgehoben.



## 6.4 Charakterisierung der Quantenpunkte

Um die drei Quantenpunkte, die sich in der Ringstruktur ausbilden, zu charakterisieren, kann man, wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, aus den Coulomb-Blockade-Linien im Transportspektrum die Kapazitäten der einzelnen Quantenpunkte relativ zu den beiden Gates QPC+G1 und G2 bestimmen.

Für QD I haben diese Kapazitäten dann die Werte  $C_{\text{QPC+G1,I}} = 6,7 \text{ aF}$  und  $C_{\text{G2,I}} = 12,5 \text{ aF}$ , für QD II sind es  $C_{\text{QPC+G1,II}} = 20,9 \text{ aF}$  und  $C_{\text{G2,II}} = 3,7 \text{ aF}$ , und für QD III  $C_{\text{QPC+G1,III}} = 2,3 \text{ aF}$  und  $C_{\text{G2,III}} = 11,9 \text{ aF}$ . Da diese Kapazitäten auch ein Maß für die Stärke der Kopplung zwischen den Quantenpunkten und den Gates sind, kann aus den berechneten Werten geschlossen werden, dass die Quantenpunkte I und III dichter an G2 liegen als an QPC+G1, während es bei Quantenpunkt II genau andersherum ist.

Außerdem können gemäß Abschnitt 2.2 aus den gemessenen Coulomb-Rauten die Kapazitäten der Quantenpunkte relativ zu der Zuleitung Source berechnet werden. Für diese Kapazitäten ergeben sich dann die Werte  $C_{\text{S,I}} = 23,9 \text{ aF}$ ,  $C_{\text{S,II}} = 49,3 \text{ aF}$  und  $C_{\text{S,III}} = 35,7 \text{ aF}$ . Weil die Geometrie des Rings eine ähnliche Größe für die im unteren Arm liegenden Quantenpunkte I und III nahe legt, dürfen ihre Kapazitäten zu Source als Maß für die Kopplung an diese Zuleitung miteinander verglichen werden. Aus dem größeren Wert für QD I ist also zu schließen, dass sich QD I näher an Source befindet als QD III.

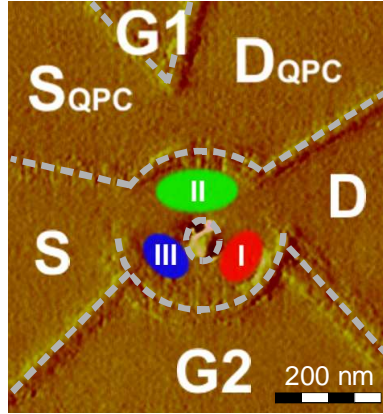


Abbildung 6.6: AFM-Bild des Quantenrings mit den für die drei Quantenpunkte bestimmten Positionen. Die Oxidlinien sind nachgezeichnet, um die asymmetrische Form der Struktur zu verdeutlichen.

Zusammengenommen ermöglichen diese Betrachtungen, jedem der drei Quantenpunkte eine der Positionen zuzuordnen, die den durch die Geometrie des Rings vorgegebenen Segmenten entsprechen. Die sich daraus ergebende Anordnung mit QD II im oberen Arm des Rings sowie den Quantenpunkten I und III an beiden Seiten der Engstelle im unteren Teil ist in Abbildung 6.6 dargestellt.

## 6.5 Ladungsdetektion mit dem QPC

Um die Aufteilung des Rings weiter untersuchen, wurden auch Messungen des Transports durch den angrenzenden QPC vorgenommen. Dazu wurden die Zuleitungen des QPC nicht mehr mit G1 verbunden, sondern sie wurden so anstatt der Zuleitungen des Quantenpunktes mit den Geräten zur Messung der Leitfähigkeit verbunden. G1 und G2 dienten dabei als Gates.

Wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, bedeuten kleine Haken in der gatespannungsabhängigen Kennlinie des QPC eine Umladung im benachbarten Bereich der Struktur, treten also dann auf, wenn sich die Anzahl der Elektronen eines der Quantenpunkte an einer Coulomb-Linie um eins ändert.

Abbildung 6.7 (a) zeigt die Ableitung der Leitfähigkeit  $G_{\text{QPC}}$  des QPC nach der Gatespannung  $V_{G2}$  in Abhängigkeit der an G1 und G2 angelegten Spannungen. Die Umladungen anzeigenden Merkmale bilden dabei deutlich sichtbare Linien. Beim Vergleichen dieser Linien mit dem Coulomb-Blockade-Muster im Transportspektrum des Rings ist zu beachten, dass die Messungen am Ring in Abhängigkeit des Gates QPC+G1 durchgeführt wurden, welches den Ring stärker beeinflusste als das Gate G1 alleine. Ein Vergleich der Messergebnisse bei  $V_{G1} = 0$  mV beziehungsweise  $V_{\text{QPC}+\text{G1}} = 0$  mV ist aber problemlos möglich. Dazu ist in Abbildung 6.7 (b) ein geeigneter Ausschnitt des Transportspektrums des Rings dargestellt. Dabei ergibt sich, dass die mit dem QPC beobachteten Umladungen bei  $V_{G1} = 0$  an denselben Werten von  $V_{G2}$  auftreten, wie die Coulomb-Linien des Quantenpunktes II bei  $V_{\text{QPC}+\text{G1}} = 0$ . Diese Positionen sind in Abbildung 6.7 mit farbigen Punkten markiert. Aber obwohl im Transportspektrum des Rings an der betrachteten Stelle auch weitere Blockade-Linien zu sehen sind, treten keine ihnen entsprechenden Merkmale im Signal des QPC auf. Dies zeigt, dass nur QD II dicht genug am QPC liegt, um ihn beeinflussen zu können. Damit liefert die Messung am QPC eine unabhängige Bestätigung der aus den Kapazitäten bestimmten Positionen, nach denen nur QD II im oberen Arm des Ringes liegt, während QD I und QD III auf der dem QPC entgegengesetzten Seite liegen.

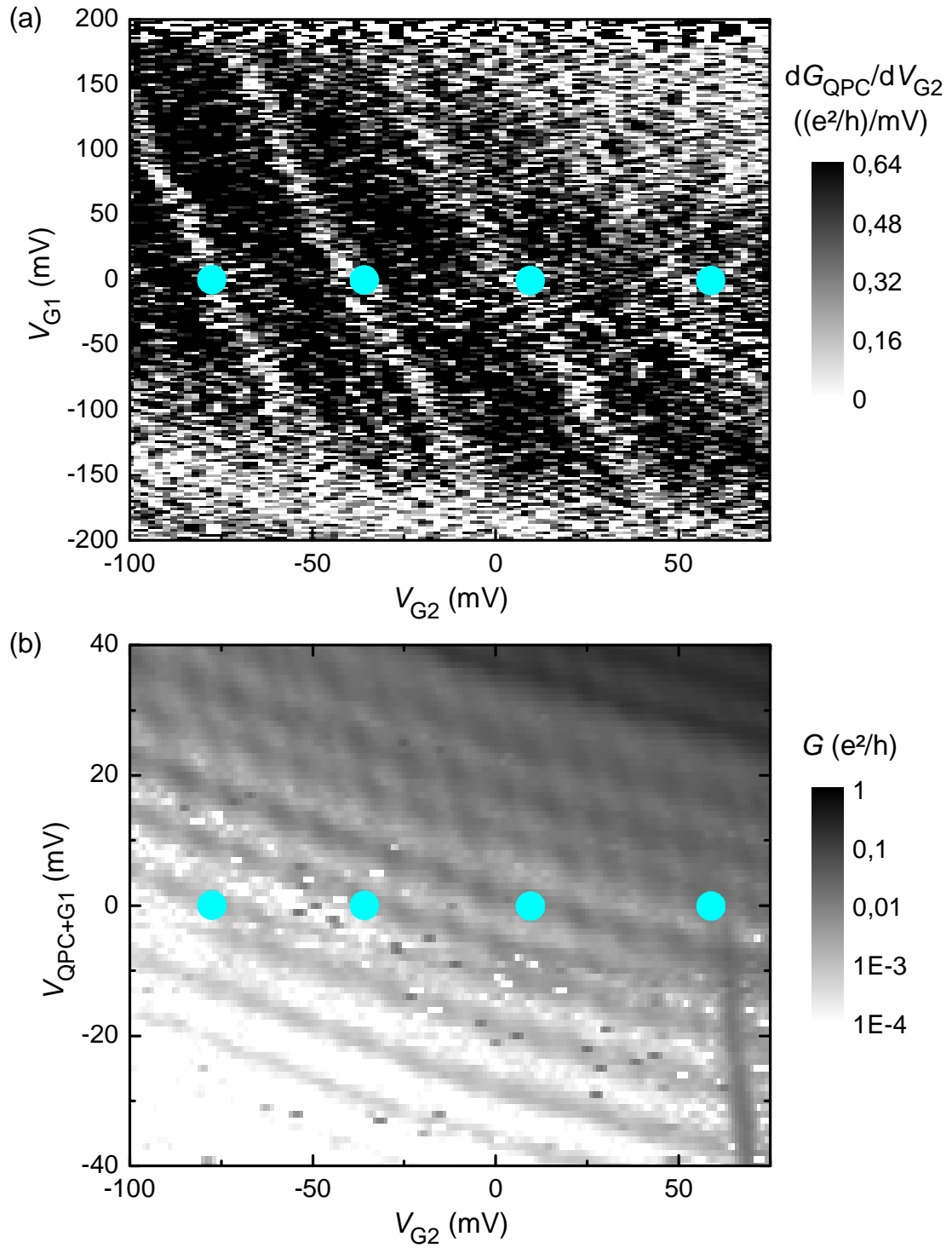


Abbildung 6.7: (a) Die Ableitung der Leitfähigkeit  $G_{\text{QPC}}$  durch den QPC nach  $V_{\text{G2}}$  in Abhängigkeit von  $V_{\text{G1}}$  und  $V_{\text{G2}}$ . (b) Ausschnitt aus dem Transportspektrum des Quantenrings.

## 6.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein Quantenring gezeigt, der eine leicht asymmetrische Geometrie besaß und mit einem benachbarten Quantenpunktkontakt kombiniert war.

Transportmessungen ergaben, dass sich diese Struktur bei hohen positiven Gatespannungen wie ein gewöhnlicher Quantenring verhielt und den erwarteten Aharonov-Bohm-Effekt zeigt. Aber bei niedrigeren Spannungen zeigte das Auftreten von überlagerten Coulomb-Blockade-Linien die Bildung von drei verschiedenen Quantenpunkten im Ring an.

An diesen Linien wurden auch die für gekoppelte Quantenpunkte typischen Kreuzungsmuster beobachtet. Diese entsprachen je nach angelegten Gatespannungen einer paarweise Kopplung zwischen zwei Quantenpunkten oder dem Vorhandensein eines echten Dreifachquantenpunktes. Außerdem konnte die Lage der drei Quantenpunkte im Ring über die Steigungen der Blockade-Linien und die zusätzlich gemessenen Coulomb-Rauten bestimmt werden. Daraus ergab sich, dass die Quantenpunkte in den Segmenten des Rings lagen, die durch die Asymmetrie der Struktur vorgeformt waren.

Über eine Messung am benachbarten Quantenpunktkontakt wurden Umladungen im oberen Arm des Rings beobachtet. Durch einen Vergleich mit den Coulomb-Blockade-Linien konnte damit die Position eines der Quantenpunkte im Ring zusätzlich bestätigt werden.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden verschiedene Quantenringe durch laterale Transportmessungen bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit eines externen Magnetfeldes und der angelegten Gatespannungen untersucht. Dabei konnten durch Interferenzphänomene die Auswirkungen verschiedener Einflüsse auf die quantenmechanische Phase der Elektronen beobachtet werden. Außerdem zeigte sich die Kopplung zwischen zwei konzentrischen Ringen, und in einem asymmetrischen Quantenring konnte die Bildung eines Dreifachquantenpunktes nachgewiesen werden.

Die Herstellung der Quantenringe erfolgte auf Basis von verschiedenen GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen, die in einer Tiefe von etwa 35 nm unter der Oberfläche ein zweidimensionales Elektronensystem (2DEG) besaßen. In dieser Schicht wurden die Ringe durch lokale anodische Oxidation mit einem Rasterkraftmikroskop erzeugt. Angrenzende Bereiche des 2DEG dienten dann als Zuleitungen beziehungsweise Gates.

Der zuerst betrachtete Ring konnte bei starker Kopplung an die Zuleitungen als Interferometer eingesetzt werden und zeigte im senkrechten Magnetfeld den Aharonov-Bohm-Effekt mit der zum Radius der Geometrie passenden Periodizität. Auch konnte die Abhängigkeit der Phase der Aharonov-Bohm-Oszillationen von einer angelegten Gatespannung beobachtet werden. Bei Tunnelkopplung an die Zuleitungen traten in einem Teil des Coulomb-Blockade-Regimes Oszillationen mit einem Drittel der Aharonov-Bohm-Periode auf. Dies wurde als Auswirkung von Elektron-Elektron-Wechselwirkung bei der geringen Anzahl von Elektronen auf dem Ring erklärt. Bei diesen Oszillationen wurde ein Phasensprung von  $\pi$  an den Coulomb-Peaks beobachtet, während sie über den Blockade-Bereichen eine allmähliche Phasenverschiebung zeigten. Der Wert dieser Verschiebung konnte in einem Bereich ohne Kondo-Effekt zu  $\pi$  und bei vorliegender Kondo-Leitfähigkeit zu annähernd  $2\pi$  bestimmt werden. Außerdem wurde das Transportspektrum des Rings über einen großen Bereich einer Gate-

spannung und des Magnetfeldes aufgenommen. Dabei wurde festgestellt, dass die Leitfähigkeit durch die Struktur über einen relativ großen Bereich einen bemerkenswert konstanten Hintergrund von  $\sim 1,75 e^2/h$  aufwies.

Des Weiteren zeigten die normalen Aharonov-Bohm-Oszillationen bei dieser Struktur und zwei weiteren untersuchten Quantenringen eine deutliche Modulation, zu deren Erklärung Spin-Bahn-Wechselwirkung angenommen wurde.

Danach wurde eine komplexe Struktur aus zwei konzentrischen Quantenringen vorgestellt. Diese war der erste bekannte derartige Doppelring, der für laterale Transportmessungen geeignet war. Im Transport durch den äußeren der beiden Ringe traten bei Variation des Magnetfeldes zwei Arten von überlagerten Oszillationen auf. Die schwächer ausgeprägten davon passten zum Aharonov-Bohm-Effekt des äußeren Rings. Dagegen entsprach die Periode der stärkeren Oszillationen einem Radius im inneren Ring, obwohl beide Ringe voneinander isoliert waren. Diese in einer solchen Struktur erstmals beobachtete Beeinflussung der Leitfähigkeit des äußeren Rings durch den inneren wurde daher auf elektrostatische Wechselwirkung zurückgeführt. Das Vorliegen einer entsprechenden Verschiebung der Ladungsverteilung im inneren Ring durch das Magnetfeld ergab sich auch aus einer theoretischen Rechnung unter Verwendung eines geeigneten Modells.

Der als letztes gezeigte Quantenring besaß durch die Lage des zentralen Oxidpunktes eine leicht asymmetrische Geometrie. Dadurch war es möglich, ihn durch Anlegen geeigneter Gatespannungen in drei gekoppelte Quantenpunkte aufzuteilen. Bei hohen positiven Gatespannungen verhielt sich diese Struktur wie ein gewöhnlicher Quantenring, während bei niedrigeren Spannungen die überlagerten Coulomb-Blockade-Linien der drei verschiedenen Quantenpunkte auftraten. Über die Steigungen dieser Linien und die Form der zusätzlich gemessenen Coulomb-Rauten konnte die Anordnung der Quantenpunkte im Ring bestimmt werden. Außerdem besaß die Struktur neben dem Ring einen angrenzenden Quantenpunktkontakt, der die Messung von Umladungen in einem Arm des Rings ermöglichte. Dadurch wurde die Position des dort liegenden Quantenpunktes bestätigt. Des Weiteren wurden bei den Coulomb-Linien auch die für gekoppelte Quantenpunkte typischen Kreuzungsmuster beobachtet. Dadurch konnte gezeigt werden, dass sich je nach angelegten Gatespannungen eine paarweise Kopplung zwischen zwei der Quantenpunkte beziehungsweise die Ausbildung eines echten Dreifachquantenpunktes einstellen ließ.

Insgesamt zeigten die Aharonov-Bohm-Messungen in dieser Arbeit deutlich die Auswirkung verschiedener Einflüsse auf die Phase der Elektronen. Damit erwies sich der Wert der Verwendung von Quantenringen als In-

terferometer. Der hier vorgestellte konzentrische Doppelring war der erste, an dem laterale Transportmessungen möglich waren. Ein besonderer Effekt seiner speziellen Geometrie war das Auftreten der Aharonov-Bohm-Periode des inneren Rings in der Leitfähigkeit des äußeren. Mit dem in einem Ring gebildeten Dreifachquantenpunkt wurde demonstriert, wie durch eine leichte Veränderung aus einem einfachen Design eine komplexere Quantenstruktur erzeugt werden kann. Dies alles lässt erwarten, dass neben Quantenringen, die als Interferometer eingesetzt werden, auch weitere neue Geometrien, die auf Quantenringen basieren, für zukünftige Untersuchungen interessant sind.





# Literaturverzeichnis

- [1] *Mesoscopic Phenomena in Solids*, Herausgeber: B. L. Altshuler, P. A. Lee und R. A. Webb (Elsevier, Amsterdam, 1992).
- [2] M. Köhler, *Nanotechnologie* (Wiley, Weinheim, 2001).
- [3] T. Heinzel, *Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures* (Wiley, Weinheim, 2003).
- [4] L. de Broglie, *Waves and Quanta*, C.R. Acad. Sci. **177**, 507 (1923).
- [5] M. A. Kastner, *The single-electron transistor*, Rev. Mod. Phys. **64**, 849 (1992).
- [6] L. P. Kouwenhoven, C. M. Marcus, P. L. McEuen, S. Tarucha, R. M. Westerveld und N. S. Wingreen, in *Mesoscopic Electron Transport*, Herausgeber: L. L. Sohn, L. P. Kouwenhoven und G. Schön (Kluwer, Dordrecht, 1997), Seite 345.
- [7] L. P. Kouwenhoven, D. G. Austing und S. Tarucha, *Few-electron quantum dots*, Rep. Prog. Phys. **64**, 701 (2001).
- [8] R. C. Ashoori, *Electrons in artificial atoms*, Nature (London) **379**, 413 (1996).
- [9] D. Leonard, M. Krishnamurthy, C. M. Reaves, S. P. Denbaars und P. M. Petroff, *Direct formation of quantum-sized dots from uniform coherent islands of InGaAs on GaAs surfaces*, Appl. Phys. Lett. **63**, 3203 (1993).
- [10] J. Moison, F. Houzay, F. Barthe, L. Leprince, E. André und O. Vatel, *Self-organized growth of regular nanometer-scale InAs dots on GaAs*, Appl. Phys. Lett. **64**, 196 (1994).
- [11] R. Dingle, H. L. Störmer, A. C. Gossard und W. Wiegmann, *Electron mobilities in modulation-doped semiconductor heterojunction superlattices*, Appl. Phys. Lett. **33**, 665 (1978).

- [12] R. J. Haug, *Single-electron tunneling through semiconducting nanostructures*, Electrochim. Acta **40**, 1283 (1995).
- [13] M. A. Nielsen und I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [14] D. Loss und D. P. DiVincenzo, *Quantum computation with quantum dots*, Phys. Rev. A **57**, 120 (1998).
- [15] L. M. K. Vandersypen, R. Hanson, L. H. Willems van Beveren, J. M. Elzerman, J. S. Greidanus, S. De Franceschi und L. P. Kouwenhoven, in *Quantum Computing and Quantum Bits in Mesoscopic Systems*, Herausgeber: A. J. Leggett, B. Ruggiero und P. Silvestrini (Kluwer, Dordrecht, 2003), Seite 80.
- [16] M. Kemerink und L. W. Molenkamp, *Stochastic Coulomb blockade in a double quantum dot*, Appl. Phys. Lett. **65**, 1012 (1994).
- [17] F. R. Waugh, M. J. Berry, D. J. Mar, R. M. Westervelt, K. L. Campman und A. C. Gossard, *Single-Electron Charging in Double and Triple Quantum Dots with Tunable Coupling*, Phys. Rev. Lett. **75**, 705 (1995).
- [18] R. H. Blick, D. Pfannkuche, R. J. Haug, K. v. Klitzing und K. Eberl, *Formation of a Coherent Mode in a Double Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **80**, 4032 (1998).
- [19] M. C. Rogge, C. Fühner, U. F. Keyser, R. J. Haug, M. Bichler, G. Abstreiter und W. Wegscheider, *Combined atomic force microscope and electron-beam lithography used for the fabrication of variable-coupling quantum dots*, Appl. Phys. Lett. **83**, 1163 (2003).
- [20] A. Vidan, R. M. Westervelt, M. Stopa, M. Hanson und A. C. Gossard, *Triple quantum dot charging rectifier*, Appl. Phys. Lett. **85**, 3602 (2004).
- [21] L. Gaudreau, S. A. Studenikin, A. S. Sachrajda, P. Zawadzki, A. Kam, J. Lapointe, M. Korkusinski und P. Hawrylak, *Stability Diagram of a Few-Electron Triple Dot*, Phys. Rev. Lett. **97**, 036807 (2006).
- [22] T. Ihn, M. Sigrist, K. Ensslin, W. Wegscheider und M. Reinwald, *Interference in a quantum dot molecule embedded in a ring interferometer*, New J. Phys. **9**, 111 (2007).

- [23] D. Schröer, A. D. Greentree, L. Gaudreau, K. Eberl, L. C. L. Hollenberg, J. P. Kotthaus und S. Ludwig, *Electrostatically defined serial triple quantum dot charged with few electrons*, Phys. Rev. B **76**, 075306 (2007).
- [24] M. C. Rogge und R. J. Haug, *Two-path transport measurements on a triple quantum dot*, Phys. Rev. B **77**, 193306 (2008).
- [25] R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach und R. B. Laibowitz, *Observation of  $h/e$  Aharonov-Bohm Oscillations in Normal-Metal Rings*, Phys. Rev. Lett. **54**, 2696 (1985).
- [26] L. P. Lévy, G. Dolan, J. Dunsmuir und H. Bouchiat, *Magnetization of mesoscopic copper rings: Evidence for persistent currents*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2074 (1990).
- [27] V. Chandrasekhar, R. A. Webb, M. J. Brady, M. B. Ketchen, W. J. Gallagher und A. Kleinsasser, *Magnetic response of a single, isolated gold loop*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3578 (1991).
- [28] K. Ismail, S. Washburn und K. Y. Lee, *Conductance in very clean quantum wires and rings*, Appl. Phys. Lett. **59**, 1998 (1991).
- [29] G. Timp, A. M. Chang, J. E. Cunningham, T. Y. Chang, P. Mankiewich, R. Behringer und R. E. Howard, *Observation of the Aharonov-Bohm effect for  $\omega\tau > 1$* , Phys. Rev. Lett. **58**, 2814 (1987).
- [30] C. J. B. Ford, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, D. C. Peacock, D. A. Ritchie, J. E. F. Frost und G. A. C. Jones, *Electrostatically defined heterojunction rings and the Aharonov-Bohm effect*, Appl. Phys. Lett. **54**, 21 (1989).
- [31] A. Fuhrer, S. Lüscher, T. Ihn, T. Heinzel, K. Ensslin, W. Wegscheider und M. Bichler, *Energy spectra of quantum rings*, Nature (London) **413**, 822 (2001).
- [32] U. F. Keyser, S. Borck, R. J. Haug, M. Bichler, G. Abstreiter und W. Wegscheider, *Aharonov-Bohm oscillations of a tuneable quantum ring*, Semicond. Sci. Technol. **17**, L22 (2002).
- [33] Y. Ji, Y. Chung, D. Sprinzak, M. Heiblum, D. Mahalu und H. Shtrikman, *An electronic Mach-Zehnder interferometer*, Nature (London) **422**, 415 (2003).

- [34] A. Lorke und R. J. Luyken, *Many-particle ground states and excitations in nanometer-size quantum structures*, Physica B **256**, 424 (1998).
- [35] A. Lorke, R. J. Luyken, A. O. Govorov, J. P. Kotthaus, J. M. Garcia und P. M. Petroff, *Spectroscopy of Nanoscopic Semiconductor Rings*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2223 (2000).
- [36] D. Granados und J. M. García, *In(Ga)As self-assembled quantum ring formation by molecular beam epitaxy*, Appl. Phys. Lett. **82**, 2401 (2003).
- [37] N. A. J. M. Kleemans, I. M. A. Bominar-Silkens, V. M. Fomin, V. N. Gladilin, D. Granados, A. G. Taboada, J. M. García, P. Offermans, U. Zeitler, P. C. M. Christianen, J. C. M. J. T. Devreese und P. M. Koenraad, *Oscillatory Persistent Currents in Self-Assembled Quantum Rings*, Phys. Rev. Lett. **99**, 146808 (2007).
- [38] S. Russo, J. B. Oostinga, D. Wehenkel, H. B. Heersche, L. M. K. V. S. S. Sobhani und A. F. Morpurgo, *Observation of Aharonov-Bohm conductance oscillations in a graphene ring*, Phys. Rev. B **77**, 085413 (2008).
- [39] A. E. Hansen, A. Kristensen, S. Pedersen, C. B. Sørensen und P. E. Lindelof, *Mesoscopic decoherence in Aharonov-Bohm rings*, Phys. Rev. B **64**, 045327 (2001).
- [40] Y. Aharonov und D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [41] M. V. Berry, *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **392**, 45 (1984).
- [42] D. Loss, P. Goldbart und A. V. Balatsky, *Berry's Phase and Persistent Charge and Spin Currents in Textured Mesoscopic Rings*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1655 (1990).
- [43] A. Stern, *Berry's Phase, Motive Forces, and Mesoscopic Conductivity*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1022 (1992).
- [44] R. Capozza, D. Giuliano, P. Lucignano und A. Tagliacozzo, *Quantum Interference of Electrons in a Ring: Tuning of the Geometrical Phase*, Phys. Rev. Lett. **95**, 226803 (2005).

- [45] A. F. Morpurgo, J. P. Heida, T. M. Klapwijk, B. J. van Wees und G. Borghs, *Ensemble-Average Spectrum of Aharonov-Bohm Conductance Oscillations: Evidence for Spin-Orbit-Induced Berry's Phase*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1050 (1998).
- [46] J. Nitta, H. Takayanagia und S. Calvet, *Magnetoresistance oscillations in an Aharonov-Bohm ring using two-dimensional electron gas InAs*, Microelectron. Eng. **47**, 85 (1999).
- [47] J.-B. Yau, E. P. De Poortere und M. Shayegan, *Aharonov-Bohm Oscillations with Spin: Evidence for Berry's Phase*, Phys. Rev. Lett. **88**, 146801 (2002).
- [48] M. J. Yang, C. H. Yang und Y. B. Lyanda-Geller<sup>1</sup>, *Quantum beating in ring conductance: Observation of spin chiral states and Berry's phase*, Europhys. Lett. **66**, 826 (2004).
- [49] A. Yacoby, M. Heiblum, D. Mahalu und H. Shtrikman, *Coherence and Phase Sensitive Measurements in a Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4047 (1995).
- [50] R. Schuster, E. Buks, M. Heiblum, D. Mahalu, V. Umansky und H. Shtrikman, *Phase measurement in a quantum dot via a double-slit interference experiment*, Nature (London) **385**, 417 (1997).
- [51] E. Buks, R. Schuster, M. Heiblum, D. Mahalu und V. Umansky, *Dephasing in electron interference by a 'which-path' detector*, Nature (London) **391**, 871 (1998).
- [52] Y. Ji, M. Heiblum und H. Shtrikman, *Transmission Phase of a Quantum Dot with Kondo Correlation near the Unitary Limit*, Phys. Rev. Lett. **88**, 076601 (2002).
- [53] D.-I. Chang, G. L. Khym, K. Kang, Y. Chung, H.-J. Lee, M. Seo, M. Heiblum, D. Mahalu und V. Umansky, *Quantum mechanical complementarity probed in a closed-loop Aharonov-Bohm interferometer*, Nat. Phys. **4**, 205 (2008).
- [54] A. W. Holleitner, C. R. Decker, H. Qin, K. Eberl und R. H. Blick, *Coherent Coupling of Two Quantum Dots Embedded in an Aharonov-Bohm Interferometer*, Phys. Rev. Lett. **87**, 256802 (2001).

- [55] M. Sigrist, A. Fuhrer, T. Ihn, K. Ensslin, S. E. Ulloa, W. Wegscheider und M. Bichler, *Magnetic-Field-Dependent Transmission Phase of a Double-Dot System in a Quantum Ring*, Phys. Rev. Lett. **93**, 66802 (2004).
- [56] T. Mano, T. Kuroda, S. Sanguinetti, T. Ochiai, T. Taten, J. Kim, T. Noda, M. Kawabe, K. Sakoda, G. Kido und N. Koguchi, *Self-Assembly of Concentric Quantum Double Rings*, Nano Lett. **5**, 425 (2005).
- [57] T. Kuroda, T. Mano, T. Ochiai, S. Sanguinetti, K. Sakoda, G. Kido und N. Koguchi, *Optical transitions in quantum ring complexes*, Phys. Rev. B **72**, 205301 (2005).
- [58] I. Neder, N. Ofek, Y. Chung, M. Heiblum, D. Mahalu und V. Umansky, *Interference between two indistinguishable electrons from independent sources*, Nature (London) **448**, 333 (2007).
- [59] G. Binnig, C. F. Quate und C. Gerber, *Atomic Force Microscope*, Phys. Rev. Lett. **56**, 930 (1986).
- [60] M. Ishii und K. Matsumoto, *Control of Current in 2DEG Channel by Oxide Wire Formed Using AFM*, Jpn. J. Appl. Phys. **34**, 1329 (1995).
- [61] U. Meirav und E. B. Foxman, *Single-electron phenomena in semiconductors*, Semicond. Sci. Technol. **11**, 255 (1996).
- [62] M. C. Rogge, *Herstellung und Charakterisierung von Doppelquantenpunktstrukturen – Kombinierte Nanostrukturierung mit Elektronenstrahl- und Rasterkraftmikroskop*, Diplomarbeit, Institut für Festkörperphysik, Universität Hannover, 2003.
- [63] W. G. van der Wiel, S. De Franceschi, J. M. Elzerman, T. Fujisawa, S. Tarucha und L. P. Kouwenhoven, *Electron transport through double quantum dots*, Rev. Mod. Phys. **75**, 1 (2003).
- [64] Y. Imry und R. Landauer, *Conductance viewed as transmission*, Rev. Mod. Phys. **71**, S306 (1999).
- [65] M. Field, C. G. Smith, M. Pepper, D. A. Ritchie, J. E. F. Frost, G. A. C. Jones und D. G. Hasko, *Measurements of Coulomb Blockade with a Noninvasive Voltage Probe*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1311 (1993).

- [66] R. Nemetudi, M. Kataoka, C. J. B. Ford, N. J. Appleyard, M. Pepper, D. A. Ritchie und G. A. C. Jones, *Noninvasive lateral detection of Coulomb blockade in a quantum dot fabricated using atomic force microscopy*, J. Appl. Phys. **95**, 2557 (2004).
- [67] S. Washburn und R. A. Webb, *Aharonov-Bohm effect in normal metal* Quantum coherence and transport, Adv. Phys. **35**, 375 (1986).
- [68] A. Caprez, B. Barwick und H. Batelaan, *Macroscopic Test of the Aharonov-Bohm Effect*, Phys. Rev. Lett. **99**, 210401 (2007).
- [69] M. Büttiker, Y. Imry und M. Y. Azbel, *Quantum oscillations in one-dimensional normal-metal rings*, Phys. Rev. A **30**, 1982 (1984).
- [70] S. Pedersen, *Aharonov-Bohm Experiments in Mesoscopic Systems*, Dissertation, Niels Bohr Institutet, Københavns Universitet, Dänemark, 1999.
- [71] M. Büttiker, in *SQUID '85 – Superconducting Quantum Interference Devices and their Applications*, Herausgeber: H. D. Hahlbohm und H. Lübbig (Walter de Gruyter, Berlin, 1985), Seite 529.
- [72] S. Pedersen, A. E. Hansen, A. Kristensen, C. B. Sørensen und P. E. Lindelof, *Observation of quantum asymmetry in an Aharonov-Bohm ring*, Phys. Rev. B **61**, 5457 (2000).
- [73] S. Washburn, H. Schmid, D. Kern und R. A. Webb, *Normal-metal Aharonov-Bohm effect in the presence of a transverse electric field*, Phys. Rev. Lett. **59**, 1791 (1987).
- [74] P. G. N. de Vegvar, G. Timp, P. M. Mankiewich, R. Behringer und J. Cunningham, *Tunable Aharonov-Bohm effect in an electron interferometer*, Phys. Rv. B **40**, 3491 (1989).
- [75] D. Takai und K. Ohta, *Aharonov-Bohm effect in the presence of magnetic flux and electrostatic potential*, Phys. Rv. B **48**, 1537 (1993).
- [76] B. Krafft, A. Förster, A. van der Hart und T. Schäpers, *Control of Aharonov-Bohm oscillations in a AlGaAs/GaAs ring by asymmetric and symmetric gate biasing*, Physica E **9**, 635 (2001).
- [77] A. G. Aronov und Y. V. Sharvin, *Magnetic flux effects in disordered conductors*, Rev. Mod. Phys. **59**, 755 (1987).

- [78] S. Viefers, P. Koskinen, P. Singha Deo und M. Manninen, *Quantum rings for beginners: energy spectra and persistent currents*, Physica E **21**, 1 (2004).
- [79] T. Ando, A. Fowler und F. Stern, *Electronic properties of two-dimensional systems*, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982).
- [80] S. Adachi, *GaAs, AlAs, and  $Al_xGa_{1-x}As$  Material parameters for use in research and device applications*, J. Appl. Phys. **58**, R1 (1985).
- [81] H. Beneking, *Halbleiter-Technologie – eine Einführung in die Prozeßtechnik von Silizium und III-V-Verbindungen* (Teubner, Stuttgart, 1991).
- [82] G. Binnig und H. Rohrer, *Scanning tunneling microscopy*, Hel. Phys. Acta **55**, 726 (1982).
- [83] H. Sugimura, T. Uchida, N. Kitamura und H. Masuhara, *Tip-induced anodization of titanium surfaces by scanning tunneling microscopy: A humidity effect on nanolithography*, Appl. Phys. Lett. **63**, 1288 (1993).
- [84] H. J. Song, M. J. Rack, K. Abugharbieh, S. Y. Lee, V. Khan, D. K. Ferry und D. R. Allee, *25 nm chromium oxide lines by scanning tunneling lithography in air*, J. Vac. Sci. Technol. B **12**, 3720 (1994).
- [85] E. S. Snow und P. M. Campbell, *Fabrication of Si nanostructures with an atomic force microscope*, Appl. Phys. Lett. **64**, 1932 (1994).
- [86] S. K. Ghandhi, *VLSI Fabrication Principles: Silicon and Gallium Arsenide*, Second Edition (Wiley, New York, 1994).
- [87] F. Pobell, *Matter and Methods at Low Temperatures*, Third Edition (Springer, Berlin, 2007).
- [88] S. Borck, *Elektronische Interferenzeffekte in mesoskopischen Halbleitersystemen*, Diplomarbeit, Institut für Festkörperphysik, Universität Hannover, 2001.
- [89] U. F. Keyser, *Nanolithography with an atomic force microscope: quantum point contacts, quantum dots, and quantum rings*, Dissertation, Institut für Festkörperphysik, Universität Hannover, 2002.



- [90] U. F. Keyser, C. Fühner, S. Borck, R. J. Haug, M. Bichler, G. Abstreiter und W. Wegscheider, *Kondo Effect in a Few-Electron Quantum Ring*, Phys. Rev. Lett. **90**, 196601 (2003).
- [91] U. F. Keyser, C. Fühner, R. J. Haug, W. Wegscheider, M. Bichler und G. Abstreiter, *Aharonov-Bohm effect of a quantum ring in the Kondo regime*, Phys. Status Solidi B **238**, 331 (2003).
- [92] U. F. Keyser, C. Fühner, S. Borck, R. J. Haug, W. Wegscheider und M. Bichler, *Fractional Aharonov-Bohm Oscillations in a Kondo Correlated Few-Electron Quantum Ring*, Adv. in Solid State Physics **43**, 113 (2003).
- [93] J. Kondo, *Resistance Minimum in Dilute Magnetic Alloys*, Prog. Theor. Phys. **32**, 37 (1964).
- [94] L. Landau, *Diamagnetismus der Metalle*, Z. Phys. **64**, 629 (1930).
- [95] P. L. McEuen, E. B. Foxman, J. Kinaret, U. Meirav, M. A. Kastner, N. S. Wingreen und S. J. Wind, *Self-consistent addition spectrum of a Coulomb island in the quantum Hall regime*, Phys. Rev. B **45**, 11419 (1992).
- [96] K. Niemelä, P. Pietiläinen, P. Hyvönen und T. Chakraborty, *Fractional oscillations of electronic states in a quantum ring*, Europhys. Lett. **36**, 533 (1996).
- [97] J. Schmid, J. Weis, K. Eberl und K. v. Klitzing, *Absence of Odd-Even Parity Behavior for Kondo Resonances in Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett. **84**, 5824 (2000).
- [98] D. Sprinzak, Y. Ji, M. Heiblum, D. Mahalu und H. Shtrikman, *Charge Distribution in a Kondo-Correlated Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **77**, 176805 (2002).
- [99] L. Shubnikov und W. J. de Haas, Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden **207a**, 1106 (1930).
- [100] P. Lucignano, D. Giuliano und A. Tagliacozzo, *Quantum rings with Rashba spin-orbit coupling: A path-integral approach*, Phys. Rev. B **76**, 045324 (2007).
- [101] A. Tagliacozzo, private Mitteilung, 2005.

- [102] V. A. Tkachenko, Z. D. Kvon, D. V. Sheglov, A. V. Latyshev, A. I. Toropov, O. A. Tkachenko, D. G. Baksheyev und A. L. Aseev, *Aharonov-Bohm Oscillation Amplitude in Small Ballistic Interferometers*, JETP Lett. **79**, 136 (2004).
- [103] P. Gartner und A. Aldea, *Hall effect and magnetoresistance in four-probe tight-binding mesoscopic rings*, Z. Phys. B **99**, 367 (1996).
- [104] B. Szafran und F. M. Peeters, *Few-electron eigenstates of concentric double quantum rings*, Phys. Rev. B **72**, 155316 (2005).
- [105] T. V. Shahbazyan und S. E. Ulloa, *Coulomb drag in mesoscopic rings*, Phys. Rev. B **55**, 13702 (1997).
- [106] M. Büttiker, *Characteristic Potentials for Mesoscopic Rings Threaded by an Aharonov-Bohm Flux*, Phys. Scr. T **54**, 104 (1994).
- [107] M. Büttiker, *Time-Dependent Current Partition in Mesoscopic Conductors*, Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B **110**, 509 (1995).
- [108] M. Büttiker und C. A. Stafford, *Charge Transfer Induced Persistent Current and Capacitance Oscillations*, Phys. Rev. Lett. **76**, 495 (1996).
- [109] C. Fricke, M. C. Rogge, B. Harke, M. Reinwald, W. Wegscheider, F. Hohls und R. J. Haug, *Noninvasive detection of charge rearrangement in a quantum dot in high magnetic fields*, Phys. Rev. B **72**, 193302 (2005).
- [110] W.-C. Tan und J. C. Inkson, *Electron states in a two-dimensional ring—an exactly soluble model*, Semicond. Sci. Technol. **11**, 1635 (1996).

# Danksagung

Allen, die diese Arbeit unterstützt haben, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen.

Insbesondere danke ich Prof. Dr. Rolf Haug für das interessante Thema, den Platz in seiner Arbeitsgruppe sowie die nette und wirklich gute Betreuung.

Auch danke ich Prof. Dr. Michael Oestreich für die freundliche Übernahme des Korreferats und Priv.-Doz. Dr. Frank Hohls für seine ständige Hilfsbereitschaft.

Ein besonderer Dank geht an Dr. Ulrich Keyser und Dr. Sebastian Borck für die vorausgegangenen Arbeiten zum Thema Quantenringe und für die Struktur 7100012-HB9.

Des Weiteren danke ich Yvonne Griep, Klara Tetzlaff, Ronny Hüther, Hartmut Lehmann und Manfred Marquardt für ihre Unterstützung in organisatorischen beziehungsweise technischen Belangen.

Außerdem möchte ich mich bei allen meinen aktuellen und ehemaligen Kollegen für die gute Zusammenarbeit und die angenehme Arbeitsatmosphäre in der Abteilung bedanken, speziell bei Dr. Annelene Dethlefsen, Алексей Агафонов, Thomas Lüdtke, Lina Bockhorn, Patrick Barthold und natürlich den Doktoranden meiner Generation Christian Fricke, Maximilian Rogge und Niels Maire.

Und zu guter Letzt noch einen großen Dank an meine Eltern und meine Schwester für ihre familiäre Unterstützung während der Zeit, in der diese Arbeit entstanden ist.

## Lebenslauf

Name: Alexander Mühle  
Geburtsdatum: 21. Dezember 1976  
Geburtsort: Wedel

1983–1987 Besuch der Grundschule Altstadt in Wedel

1987–1996 Besuch des Johann-Rist-Gymnasiums in Wedel  
1996 Abitur

1996–1997 Grundwehrdienst

1997–2003 Studium der Physik an der Universität Hannover  
Diplomarbeit: „Charakterisierung und Strukturierung  
einer GaN/AlGaIn-Heterostruktur“  
betreut von Prof. Dr. Rolf J. Haug

Januar 2003 Diplom

seit März 2003 Vorbereitung der Dissertation  
am Institut für Festkörperphysik  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
bei Prof. Dr. Rolf J. Haug

## Veröffentlichungen

- *Coupling in concentric double quantum rings*,  
A. Mühle, W. Wegscheider und R. J. Haug,  
Applied Physics Letters **91**, 133116 (2007)
- *Quantum dots formed in a GaAs/AlGaAs quantum ring*,  
A. Mühle, W. Wegscheider und R. J. Haug,  
Applied Physics Letters **92**, 013126 (2008)
- *Coulomb-coupled concentric quantum rings*,  
A. Mühle, W. Wegscheider und R. J. Haug,  
Physica E **40**, 1246 (2008)